Calcolabilità 06 – 07

Esercizi – Settimana 6

1. Siano $l, m \in \mathbf{N}$ e siano h, k due funzioni totali ricorsive ternarie. Si definiscano le funzioni f e g nel modo seguente:

$$\begin{array}{ll} f(0) = l & g(0) = m \\ f(n+1) = h(n, f(n), g(n)) & g(n+1) = k(n, f(n), g(n)) \end{array}$$

   (Si dice che f e g sono definite per *mutua ricorsione.*)

   Provare formalmente (cioè senza usare Tesi di Church) che f e g sono totali ricorsive.

   Suggerimento: ricondurre le definizioni di f e g allo schema di ricorsione primitiva, mediante codifica e decodifica effettiva di coppie di naturali.

   Cosa si può dire di f e g se h e k sono solo ricorsive?

2. Diciamo che una funzione ψ è *finita* se $\mathrm{dom}(\psi)$ è finito.

   Provare che ogni funzione finita è ricorsiva.

   Suggerimento: supponiamo ψ 1–aria e $\psi \neq \mathrm{div}$ (ovviamente, div è ricorsiva). Sia $\mathrm{dom}(\psi) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ e sia $\psi(a_i) = b_i$ per ogni $1 \leq i \leq n$. Modificare in modo opportuno la funzione

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i \, \overline{\mathrm{sg}} \, \mathrm{abs}(x, a_i).$$

3. Provare che ogni insieme r.e. infinito contiene un sottoinsieme ricorsivo infinito.

   Suggerimento: ricordare che gli insiemi ricorsivi infiniti sono esattamente quelli enumerabili mediante una funzione totale ricorsiva strettamente crescente.

4. Provare che le seguenti sono equivalenti per $A \subseteq \mathbf{N}$:

   (a) A è ricorsivo;

   (b) $A = \emptyset$ oppure esistono una funzione totale ricorsiva strettamente crescente o una funzione totale *definitivamente costante* (cioè costante da un certo punto in poi) che enumera A.

   Una funzione totale definitivamente costante è ricorsiva?

5. Sia P un predicato r.e. e sia $\psi \in \mathcal{R}^{(1)}$.

   (a) Provare formalmente (senza usare tesi di Church) che la funzione
   $$\eta(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{se } P(x), \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$
   è ricorsiva.

   (b) Provare con un esempio che, se $\chi \in \mathcal{R}^{(1)}$ e ψ, P sono come sopra, la funzione
   $$\mu(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{se } P(x), \\ \chi(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$
   non è –in generale– ricorsiva.
   Suggerimento: scegliere opportunamente -ed in modo semplice– P, ψ, χ.

6. Sia A un insieme r.e. Provare che:

   (a) L'insieme $\bigcup_{x \in A} W_x$ è r.e.
   Suggerimento: usare una opportuna caratterizzazione degli insiemi r.e.

   (b) In generale $\bigcap_{x \in A} W_x$ non è un insieme r.e.
   Suggerimento: Sia h una funzione ricorsiva totale tale che $W_h(x) = \mathbf{N} \setminus \{x\}$ per ogni $x \in \mathbf{N}$ (provare che una tale h esiste). Osservare che l'insieme $A = \{h(x) : x \in K\}$ è r.e. e che $\bigcap_{y \in A} W_y = \overline{K}$.

7. Usando il Teorema di Rice-Shapiro, provare che i seguenti non sono r.e.:

   (a) $\{x : W_x = \emptyset\}$;

   (b) $\{x : W_x \text{ è finito}\}$;

   (c) $\{x : \varphi_x = z\}$;

   (d) $\{x : \varphi_x \neq z\}$.

8. Usando il Teorema di Rice-Shapiro, provare che, per ogni $\psi \in \mathcal{R}^{(1)}$, l'insieme $A = \{x \in \mathbf{N} : \varphi_x = \psi\}$ non è r.e.