CALCOLABILITÀ 06 – 07

ESERCIZI – SETTIMANA 7

1. Provare che i seguenti insiemi sono produttivi:
   (a) $\{x : W_x \text{ è finito}\}$;
   (b) $\{x : \varphi_x \text{ non è suriettiva}\}$;
   (c) $\{x : \varphi_x \text{ è una funzione iniettiva}\}$;
   (d) $\{x : k \notin E_x\}$, dove k è un fissato numero naturale.

2. Provare che i seguenti insiemi sono creativi:
   (a) $\{x : x \in E_x\}$;
   (b) $\{x : \varphi_x(x) \in A\}$, dove A è un qualunque insieme r.e. non vuoto;
   (c) $\{x : \varphi_x \text{ non è una funzione iniettiva}\}$.

3. Provare che se B è r.e. e $A \cap B$ è produttivo, allora A è produttivo.

   Suggerimento:

   (a) Provare anzitutto che esiste f ricorsiva totale tale che, per ogni W_x, $W_{f(x)} = W_x \cap B$.
   (b) Sia g una funzione produttiva per $A \cap B$. Sia $W_x \subseteq A$. Allora $W_{f(x)} \subseteq A \cap B$, quindi $g(f(x)) \in (A \cap B) \setminus W_{f(x)}$. Provare che $g(f(x)) \in A \setminus W_x$ e qundi $g \circ f$ è una funzione produttiva per A.

4. Provare che se C è creativo e A è un insieme r.e. tale che $A \cap C = \emptyset$ allora $C \cup A$ è creativo.

   Suggerimento: Usare la definizione di insieme creativo. Osservare anzitutto che, esiste una funzione $k \in \mathcal{R}_t^{(1)}$ tale che, per ogni x, $W_{k(x)} = W_x \cup A$. (Verificare!)

   Per provare che $\overline{C \cup A}$ è produttivo, sia $W_x \subseteq \overline{C \cup A}$. Allora $W_{k(x)} = W_x \cup A$ è un sottoinsieme r.e. di $\overline{C}$. (Verificare!)

   Quindi, se f una funzione produttiva per $\overline{C}$, si ha $fk(x) \in \overline{C} \setminus (W_x \cup A)$. Concludere che $fk(x) \in \overline{C \cup A} \setminus W_x$.

5. Dire se i seguenti insiemi sono creativi oppure produttivi:
   (a) $\{x : W_x \neq \emptyset\}$;

(b) $\{x : x^2 + 1 = x\}$;

(c) $\{x : \varphi_x(x) = x\}$;

(d) $\overline{K} \cup A$, dove A è un qualunque sottoinsieme ricorsivo di K.