Calcolabilità 06 – 07

Esercizi – Settimana 8

1. Provare che ogni insieme produttivo contiene un insieme ricorsivo infinito.

2. Siano A, B insiemi semplici. Provare che l'insieme
$$A \oplus B = \{2n : n \in A\} \cup \{2n+1 : n \in B\}$$
è semplice.

3. Sia $\langle\ ,\ \rangle : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ una biiezione ricorsiva con funzioni di decodifica ricorsive. Se $A, B \subseteq \mathbf{N}$, definiamo
$$A \otimes B = \{\langle m, n\rangle : m \in A \text{ e } n \in B\}.$$
Provare che se $A \subseteq \mathbf{N}$ è un insieme semplice, allora $A \otimes \mathbf{N}$ è r.e., ma non ricorsivo, nè creativo nè semplice.

4. Due insiemi disgiunti $A, B \subseteq \mathbf{N}$ si dicono *effettivamente ricorsivamente inseparabili* se esiste $f \in \mathcal{R}_t^{(2)}$ tale che ogni volta che $A \subseteq W_x$, $B \subseteq W_y$ e $W_x \cap W_y = \emptyset$, allora $f(x, y) \notin W_x \cup W_y$.

   (a) Provare che gli insiemi
   $$K_0 = \{x : \varphi_x(x) = 0\} \quad \text{e} \quad K_1 = \{x : \varphi_x(x) = 1\}$$
   sono effettivamente ricorsivamente inseparabili.
   Suggerimento: Provare che esiste $f \in \mathcal{R}_t^{(2)}$ tale che, se $W_x \cap W_y = \emptyset$,
   $$\varphi_{f(x,y)}(z) = \begin{cases} 1 & \text{se } z \in W_x; \\ 0 & \text{se } z \in W_y; \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   (b) Provare che se A, B sono effettivamente ricorsivamente inseparabili e sono r.e., allora essi sono entrambi creativi.

5. Provare che $\{x : W_x \text{ è infinito}\} \not\leq_m K$.

6. Caratterizzare gli insiemi r.e. A per cui entrambe $A \leq_m \bar{A}$ e $\bar{A} \leq_m A$ valgono.