Calcolabilità 06 – 07

Esercizi – Settimana 9

1. **Definizione** Un insieme $A$ si dice $m$–completo se

   (1) $A$ è r.e.

   (2) per ogni insieme r.e. $B$ si ha $B \leq_m A$.

   (a) Dare un esempio di insieme $m$–completo (senza usare i punti successivi).

   (b) Provare che $A$ è $m$–completo se e soltanto se $A$ è r.e. e $K \leq_m A$.

   (c) Provare che ciascuno degli insiemi seguenti è $m$-completo:

      i. $\{x : n \in W_x\}$, con $n$ un fissato numero naturale;

      ii. $\{x : \varphi_x(x) = 0\}$;

      iii. $\{x : x \in E_x\}$.

2. Provare che i seguenti insiemi appartengono allo stesso $m$-grado:

   (a) $A = \{x : W_x \text{ è infinito}\}$;

   (b) $B = \{x : \varphi_x \text{ è totale e costante}\}$;

   (c) $C = \{x : \varphi_x = z\}$, dove $z$ è la funzione 1-aria che vale costantemente zero.

   *Suggerimento*: usare $S - 1 - 1$ Teorema per provare le necessarie $m$–riducibilità.

   1. per $A \leq_m B$ utilizzare il fatto che $W_x$ è infinito se e soltanto se per ogni $n \in \mathbf{N}$ esiste $y \in W_x$ tale che $n < y$;

   2. per $B \leq_m C$ osservare che $\varphi_x$ è totale e costante se e soltanto se, per ogni $y$, $\sum_{z<y} \mathrm{abs}(\varphi_x(y), \varphi_x(z)) = 0$.

3. Sia $\langle\,,\,\rangle$ una biiezione ricorsiva che codifica le coppie di numeri naturali. Dati $A, B \subseteq \mathbf{N}$ definiamo $A \otimes B = \{\langle a, b\rangle : a \in A \text{ e } b \in B\}$.

   Provare che:

   (a) $A \equiv_m A \otimes \mathbf{N}$ per ogni insieme $A$;

   (b) $A \equiv_m A \otimes B$ per ogni insieme $A \neq \mathbf{N}$ ed ogni $B$ ricorsivo non vuoto.

4. Sia $A \in \mathbf{a}$. Definiamo $\mathbf{a}^* = d_m(\bar{A})$. Provare che:

   (a) il grado $\mathbf{a}^*$ è ben definito (cioè non dipende dalla scelta di $A$ in $\mathbf{a}$).

   (b) $(\sup(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*))^* = \sup(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*)$.

   (c) in generale $A \equiv_m \bar{A}$ non implica che $A$ sia ricorsivo.

   *Suggerimento*: usare il punto precedente con $\mathbf{a} = d_m(K)$.