Diario delle Esercitazioni di Analisi Matematica - UD4 - A.A. 05/06

14 settembre 2005, mercoledi (2 ore)

Definizione di norma in uno spazio vettoriale, distanza indotta da una norma (tra due punti, tra punto e insieme e tra insiemi), diametro di un insieme. Definizione in $\mathcal{R}^n$ di norma L_p (con p=2 norma euclidea) e norma L_∞. Definizione di norme equivalenti. Dimostrazione che la norma L_1 e la norma euclidea sono equivalenti alla norma L_∞.
Oss: tutte le norme in $\mathcal{R}^n$ sono equivalenti.
Oss: ci sono distanze che non provengono da una norma (ad esempio la distanza discreta o la distanza definita da $d(x,y) = |\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}|$).
Definizione di sfera aperta e sfera chiusa: rappresentazione delle sfere a seconda della norma scelta.
Definizione di insieme aperto, chiuso, di punto interno, di interno di un insieme ($intE$ oppure $\dot{E}$), di esterno di un insieme ($extE$ o $estE$).
Oss: E aperto $\Longleftrightarrow \; E = \dot{E}$.
Esercizio: dimostrare che le sfere aperte sono insiemi aperti e le sfere chiuse sono insiemi chiusi.
Proprietà degli aperti, proprietà dei chiusi.
Oss: l'intersezione arbitraria di aperti non è detto che sia aperta, ad esempio $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} B_{\frac{1}{n}}(0,0) = \{(0,0)\}$; l'unione arbitraria di chiusi non è detto che sia chiusa, ad esempio $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \overline{B}_{1-\frac{1}{n}}(0,0) = B_1(0,0)$.
Definizione di intorno e di punto di accumulazione.
Oss: un punto di accumulazione di un insieme puo' appartenere come non appartenere all'insieme.
Definizione di insieme derivato (E'). Osserviamo che tra E e il suo derivato E' non esiste nessuna inclusione valida in generale.
Esercizio: f chiuso $\Longleftrightarrow F \supset F'$.
Definizione di chiusura di un insieme E ($\overline{E}$) e di punto isolato.
Oss: E chiuso $\Longleftrightarrow \overline{E} = E$; inoltre $A, B \in \mathcal{R}^n \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
Oss: $\overline{E} = E \cup E'$.
Esercizio: ogni insieme costituito da punti isolati deve essere necessariamente chiuso? ($E = \{\frac{1}{n} \;,\; n \in \mathcal{N} \;,\; n \geq 1\}$).
Esercizio: trovare un insieme con 17 punti di accumulazione.
Esercizio: sia $E = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 : \; y = \sin\frac{1}{x} \;,\; 0 < x \leq 1\} \subset \mathcal{R}^2$. Trovare $\overline{E}$.
Esercizio: mostrare che in generale $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$, mentre vale $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (ma non vale per unioni arbitrarie).
Definizione di frontiera di un insieme E (∂E). La frontiera di un insieme è sempre un insieme chiuso.
Oss: si verifica facilmente che $\mathcal{R}^n = \dot{E} \cup \partial E \cup extE \quad \forall \; E \subset \mathcal{R}^n$.

Esercizio: trovare la frontiera dell'insieme $A \subset \mathcal{R}^n$,
$A = B_2(0,0) \setminus ([-1,1] \times \{0\}) \bigcup ([-1,1] \times \{3\})$.
Oss: ci sono insiemi che non hanno interno ($[a,b] \subset \mathcal{R}^2$) e quindi insiemi che non hanno punti esterni. L'insieme puo' essere sparpagliato e quindi avere una frontiera spessa (i razionali di $\mathcal{R}^2$ hanno la frontiera che è tutto $\mathcal{R}^2$), cioè ∂E puo' contenere E (anche $E = \left\{\frac{1}{n}\ ,\ n \in \mathcal{N}\ ,\ n \geq 1\right\}$ ha $\partial E = E \cup \{0\}$).
Distribuzione del foglio di esercizi per casa: Esercizi di riscaldamento.

19 settembre 2005, lunedi (2 ore)

Esercizio: in $\mathcal{R}^2$ si prenda la distanza euclidea; dire se è vero o falso che $diamE = d \Longrightarrow \exists x \in \mathcal{R}^2\ :\ E \subset \overline{B}_{\frac{d}{2}}(x)$.
Esercizio: vediamo con un esempio di come non sia possibile testare l'apertura di un insieme E di $\mathcal{R}^2$ limitandosi a testare l'apertura in $\mathcal{R}$ delle intersezioni di E con qualunque retta.
($A = \left\{(x,y) \in \mathcal{R}^2 :\ x \in \mathcal{R}\ ,\ y > 0\ ,\ y > 2x^2\ ,\ y < x^2\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathcal{R}^2 :\ x \in \mathcal{R}\ ,\ y \leq 0\right\}$)
Definizione di derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(P_0)$.
Esempio: calcolare $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(P_0)$, dove $f(x,y) = x^2 + y^2$, $P_0 = (1,2)$, α è rispettivamente $(0,1)$, $(1,0)$, $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Calcolare tale derivata anche nella direzione della retta $y = \frac{1}{2}x$.
Oss: se le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono continue si ha $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(P_0) = Df(P_0) \circ \alpha$.
(In realtà è suff. la differenziabilità della funzione)
Esercizio: sia $f(x,y) = \ln(e^x + e^y)$. Calcolare la derivata di f nella direzione che forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con l'asse delle x.
Esercizio: dimostrare che la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$
è continua e derivabile in $(0,0)$ in qualunque direzione, ma non è differenziabile in $(0,0)$.
Oss: avevamo visto che l'esistenza delle derivate parziali non implica neppure la continuità; osserviamo adesso che neanche l'esistenza di tutte le derivate direzionali implica la continuità.
Ad esempio $f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) :\ y \geq x^2\ ,\ y \leq 0 \\ 1 & (x,y) :\ 0 < y < x^2 \end{cases}$ oppure $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.
Entrambe le funzioni sono derivabili in $(0,0)$ in qualunque direzione, ma non sono continue in $(0,0)$.
Distribuzione del foglio di esercizi per casa: Esercizi quo vadis? .

26 settembre 2005, lunedi (2 ore)

Definizione di differenziale per funzioni $f : \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^p$.
Esercizio: calcolare il differenziale di $f(x,y,z) = (2x + e^y, x + y \sin z)$ nel punto $(1,1,\pi)$, di $g(x,y) = (\cos(x+y), y, y^x)$ e di $h(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$.
Regola della derivata di una composta nel caso più generale possibile.
Esercizio: sia $h(x,y,z) = f(g(x,y,z))$, dove $g(x,y,z) = (\sin 2x + yz, 3z + \tan y, xyz)$, $f(u,v,w) = u^2 + v^3 - 3w$. Calcolare $Dh(x,y,z)$.

Esercizio: sia $h(t) = f(g(t))$, dove $g(t) = (t\cos t, t\sin t)$, $f(x,y) = e^{xy^2}$. Calcolare $h'(\frac{\pi}{2})$.
Esercizio: data $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, definisco $\Delta f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_k}$ e lo chiamo Laplaciano di f. Nel caso particolare di $\mathcal{R}^2$, in cordinate polari si ha che $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}$.
Esercizio: sia $f \in \mathcal{R}^3$. Se considero le coordinate cilindriche $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$, ho che $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}$
Esercizio: sia $f \in \mathcal{R}^3$. Se considero le coordinate sferiche $\begin{cases} x = r\sin\phi\cos\theta \\ y = r\sin\phi\sin\theta \\ z = \cos\phi \end{cases}$, ho che $\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial f}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2 f}{\partial^2\theta}$.
Esercizio: sia $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Mostrare che $\Delta f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x,y) \neq (0,0)$. Fare il conto (più semplice) anche in coordinate polari.
Distribuzione del foglio di esercizi per casa: Esercizi d'autunno.

3 ottobre 2005, lunedi (2 ore)

Teorema delle funzioni implicite in due variabili e nel caso più generale possibile.
Esercizio: Calcolare le derivate prime e seconde della funzione $y = g(x)$ definita implicitamente dall'equazione $xy^2 + 4x^2y - 5 = 0$, nel punto $(1,1)$.
Esercizio: osservare che nell'intorno dei punti singolari $(0,0)$ e $(1,1)$ l'equazione $f(x,y) = 0$ ($f(x,y) = (x-y)(y-x^2)$) non può essere esplicitata nè come $y = g(x)$, nè come $x = h(y)$.
Esercizio: Calcolare la matrice delle derivate della funzione $z = g(x,y)$ definita implicitamente dall'equazione $z - (x^2+y^2)\cos(xz) - 1 = 0$, nel punto $(\frac{\pi}{2}, 0, 1)$.
Esercizio: Calcolare la matrice delle derivate della funzione $(y,z) = g(x) = (g_1(x), g_2(x))$ definita implicitamente dall'equazione $f(x,y,z) = 0$ ($f(x,y,z) = (x + xy + z, 2z - y - x)$) , nel punto $(0,0,0)$.
Esercizio: Calcolare la matrice delle derivate della funzione $(z,t) = g(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$ definita implicitamente dall'equazione $f(x,y,z,t) = 0$ ($f(x,y,z,t) = (te^x + z^2 + y - 4, z - t)$) , nel punto $(\ln 2, 1, 1, 1)$.
Distribuzione del foglio di esercizi per casa: Esercizi $\gamma\nu\omega\theta\iota\ \sigma\epsilon\alpha\upsilon\tau\omega\nu$.

10 ottobre 2005, lunedi (2 ore)

Definizione di superficie, curve, varietà regolari. Commenti vari. Definizione di piano tangente e di versore normale ad una superficie: collegamento con le superficie cartesiane.
Curve: definizione di curve equivalenti, esempi.
Oss: $\gamma(t)$ derivabile non significa traiettoria dolce (esempio $\gamma(t) = (t^3, t^2)$).
Lunghezza di una curva. Esempio: calcolare la lunghezza della curva

$\gamma(t) = (t, \frac{1}{2}\ln(1-t^2))$, $t \in [0, \frac{1}{2}]$.
Lunghezza di una curva cartesiana, lunghezza di una curva in coordinate polari.
Esempio: calcolare la lunghezza del bordo superiore della palla di raggio 2 centrata nell'origine vista come curva cartesiana e poi come curva espressa in coordinate polari.
Definizione di integrale di una funzione lungo una curva $\displaystyle\int_\gamma f\ ds$.
Esercizio: calcolare $\displaystyle\int_\gamma y\ ds$, dove γ è la curva cartesiana di equazione $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, 6]$.
Esercizio: calcolare $\displaystyle\int_\gamma \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$, dove $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
Definizione di baricentro e momento d'inerzia.
Esercizio: calcolare il baricentro dell'elica $\gamma(t) = (r\cos\omega t, \sin\omega t, kt)$, $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$.
Esercizio: calcolare il momento d'inerzia della curva $\gamma(t) = (1-t, t, 2t)$, $t \in [0, 1]$ rispetto al punto $(0, 0, 0)$.
Distribuzione del foglio di esercizi per casa: Esercizi noli foras ire.

17 ottobre 2005, lunedi (2 ore)

Definizione di lavoro. Esempio: calcolare il lavoro svolto dalla forza $F(x, y, z) = (x, xy, 1)$ lungo la curva $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0, 1]$.
Lunghezza d'arco. Esempio: parametrizzare con la lunghezza d'arco la curva $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $t \in [0, 2\pi]$.
Dopo aver ricordato la definizione di integrale di una funzione lungo una curva $\displaystyle\int_\gamma f\ ds$ si introduce $\displaystyle\int_\gamma f\ dx_i$ e $\displaystyle\int_\gamma F\ dx = \sum_{k=1}^{n}\int_\gamma f_k\ dx_k$, dove $F = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$, $dx = (dx_1, dx_2, \cdots, dx_n)$.
1-forme in Ω aperto connesso: integrale di una forma lungo una curva $\displaystyle\int_\gamma \omega$.
Forme esatte e forme chiuse, calcolo del potenziale, varie equivalenze.
Esercizio: sia $\Omega = \{4x^2 + y^2 \leq 4\}$.
La forma $\omega = (e^x \sin y)dx + (e^x\cos y + 2x - 2y)dy$ è esatta? È chiusa?
Esercizio: calcolare $\displaystyle\int_\gamma ydx$, dove $\gamma = (a\cos t, b\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
Esercizio: calcolare $\displaystyle\int_\gamma y^2dx + xdy$, dove γ è il segmento che unisce $(0, 1)$ a $(2, 0)$.
Esercizio: calcolare $\displaystyle\int_\gamma xdx + ydy$, dove $\gamma = (2\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
Esercizio: calcolare $\displaystyle\int_\gamma ydx + zdy + xdz$, dove γ è la curva intersezione della superficie $z = xy$ con il cilindro $x^2 + y^2 = 1$, percorsa in senso antiorario .
Distribuzione del foglio di esercizi per casa: Esercizi del fungo.

24 ottobre 2005, lunedi (2 ore)

Oss: abbiamo già osservato che l'integrale di una forma esatta non dipende dal cammino, ma solo dagli estremi. Quindi nel caso di un integrale di una forma esatta lungo una curva "complicata", il calcolo si può fare sostituendo la curva con una più semplice (ad esempio parallela agli assi) che abbia gli stessi estremi.
Esempio: calcolare $\int_\gamma (x^2 - y^2)dx - 2xydy$,
dove $\gamma = (t^2 - 1, t^2 + t + 2)$, $t \in [0, 1]$.
Esercizio: trovare una funzione $f(x)$ tale che la forma differenziale $\omega = f(x)(x + y^2)dx + f(x)xydy$ sia esatta. Trovare un potenziale.
Oss: in $\mathcal{R}^3$ che la forma $\omega = A_1dx+A_2dy+A_3dz$ sia chiusa equivale a $rotA = 0$.
Commenti, esempi, esercizi vari sugli esercizi dati finora per casa.
Caratterizzazione dei punti critici di una funzione di più variabili mediante il segno degli autovalori della matrice hessiana.
Esempio: studio dei punti critici di $f(x, y) = x^2 - x^2y^2 + y^2 + y^3$.
Esercizio: studio dei punti critici di $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz$.
Oss: sia $t^n + a_1t + a_2t^{n-1} + \cdots + a_{n-1}t + a_n$ un polinomio con n radici reali. Esse saranno tutte positive se gli a_i sono alternativamente negativi e positivi e saranno tutte negative se gli a_i sono tutti positivi.

26 ottobre 2005, mercoledi(2 ore)

Compito di prova:

- EX1: calcolare, se esistono, le derivate della funzione
  $$f(x, y) = \begin{cases} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq 0 \\ 0 & (x, y) = 0 \end{cases}$$
  nell'origine, nella direzione α , $\forall\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{R}$, $|\alpha| = 1$.

  Dire se f è differenziabile nell'origine.

- EX2: mostrare che $f(x, y, z) = \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)}+x^2y^3z^4-4 = 0$ definisce nell'intorno del punto $(1, 1, 1)$ una funzione $z = g(x, y)$.

  Calcolare $\nabla g(1, 1)$.

- EX3: sia $\omega = (2xe^y)dx + (x^2e^y - 1)dy$. Verificare che ω è chiusa (e quindi anche esatta, perchè ?) e calcolarne un potenziale.

  Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove γ è la curva cartesiana $y = \ln x$, $x \in [1, e]$

  (calcolo sia diretto che con l'uso del potenziale) .

  Verificare con un conto diretto che $\int_\gamma \omega = \int_{\overline{\gamma}} \omega$, dove $\overline{\gamma}$ è la curva formata dai due segmenti che uniscono $(1, 0)$ a $(e, 0)$ ed $(e, 0)$ a $(e, 1)$.

27 ottobre 2005, giovedi(2 ore)

Integrali multipli, caso $\mathcal{R}^2$. I due strumenti fondamentali per ricondursi al calcolo di integrali in una variabile: il teorema di Fubini e la formula di cambiamento di variabili (sopattutto il caso speciale del passaggio a coordinate polari).

Esercizio: calcolare $\int\int_{[a,b]\times[c,d]} k \, dxdy$.

Esercizio: calcolare $\int\int_D (xy^2+1) \, dxdy$,

dove $D = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 : -1 \le x \le 1 \, , \, 0 \le y \le 2\}$ (due ordini d'integrazione).

Esercizio: calcolare $\int\int_D (x^2+y^2) \, dxdy$,

dove $D = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 : 1 \le x \le 2 \, , \, 1 \le y \le x^2\}$.

Commenti su come fare l'iterazione nell'ordine migliore a seconda del dominio d'integrazione e della funzione integranda.

Esercizio: calcolare $\int\int_D e^{y^3} \, dxdy$,

dove $D = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 : 0 \le x \le 1 \, , \, \sqrt{x} \le y \le 1\}$.

Esercizio: calcolare $\int\int_D \frac{x^2+y^2}{x+y} \, dxdy$, dove D è il triangolo di vertici $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

Esercizio: passando a coordinate polari, calcolare $\int\int_D \frac{x+y}{x^2+y^2} \, dxdy$, dove D è il primo quadrante del cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $R > 0$.