Diario delle Esercitazioni di Analisi Matematica

UD5 - A.A. 05/06

Ricordo l'ultima lezione dell'unità 4:

27 ottobre 2005, giovedi(2 ore)

Integrali multipli, caso $\mathcal{R}^2$. I due strumenti fondamentali per il calcolo di integrali doppi sono il teorema di Fubini e la formula di cambiamento di variabili (sopattutto il caso speciale del passaggio a coordinate polari).
Esercizio: calcolare $\int\int_{[a,b]\times[c,d]} k\ dxdy$.
Esercizio: calcolare $\int\int_D (xy^2+1)\ dxdy$,
dove $D = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\ ,\ 0 \leq y \leq 2\}$ (due ordini d'integrazione).
Esercizio: calcolare $\int\int_D (x^2+y^2)\ dxdy$,
dove $D = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 : 1 \leq x \leq 2\ ,\ 1 \leq y \leq x^2\}$.
Commenti su come fare l'iterazione nell'ordine migliore a seconda del dominio d'integrazione e della funzione integranda.
Esercizio: calcolare $\int\int_D e^{y^3}\ dxdy$,
dove $D = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\ ,\ \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$.
Esercizio: calcolare $\int\int_D \frac{x^2+y^2}{x+y}\ dxdy$, dove D è il triangolo di vertici $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.
Esercizio: passando a coordinate polari, calcolare $\int\int_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\ dxdy$, dove D è il primo quadrante del cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $R > 0$.

08 novembre 2005, lunedi(2 ore)

Risoluzione dettagliata dell'esercizio facoltativo del compito del 4/11/05.
Definizione di baricentro di un insieme. Esempio: calcolare il baricentro dell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 : y \geq 0x\ ,\ \geq 0\ ,\ \sqrt{x}+\sqrt{y} \leq 2\}$.
Oss: si osservi che, prendendo $f(x,y) = 1$, l'integrale di f in $\mathcal{R}^2$ su di un dominio D dà l'area di D e, prendendo $f(x,y,z) = 1$, l'integrale di f in $\mathcal{R}^3$ su di un dominio A dà il volume di A.
Esercizio: calcolare l'area della regione D racchiusa dalla curva data dall'unione della curva di equazione $r = a\theta$, $a > 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e del segmento congiungente i punti $(0,0)$ e $(2\pi a, 0)$.
Cambio di variabili negli integrali in $\mathcal{R}^n$. Casi speciali in $\mathcal{R}^3$: da coordinate cartesiane a coordinate cilindriche e da coordinate cartesiane a coordinate sferiche.
Esempi:
1) calcolare $\int\int\int_D (x^2+y^2-z)\ dxdydz$,

dove D è il cilindro retto di base $B_1(0,0)$ ed altezza 2
2) calcolare il volume di un cono gelato.
Distribuzione del foglio di eserzi per casa: Esercizi "È arrivata" (la neve).

14 novembre 2005, lunedi(2 ore)

Esercizio: calcolare $\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}\ dxdy$, dove D è la regione interna alla circonferenza $x^2+y^2=2x$ (usare coordinate polari).
Esercizio: calcolare $\int\int_D (x-y)^2 \sin^2(x+y)\ dxdy$, dove dove D è il quadrato di vertici $(\pi,0)$, $(\pi,2\pi)$, $(0,\pi)$, $(2\pi,\pi)$.
Esercizio: calcolare $\int\int\int_D (x^2+y^2)\ dxdydz$,
dove $D=\{(x,y,z)\in\mathcal{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\leq 4\}$.
Esercizio: calcolare $\int\int_D (x^2+y^2)\ dxdydz$, dove D è il cono circolare di raggio a ed altezza b centrato sull'asse z.
Integrali impropri: in analogia con gli integrali $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\ dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\ dx$, in una variabile, vedere se convergono o meno gli integrali in due variabili
$\int\int_{B_1(0,0)} \frac{1}{|(x,y)|^p}\ dxdy$, $\int\int_{\mathcal{R}^2-B_1(0,0)} \frac{1}{|(x,y)|^p}\ dxdy$.
Introduzione agli insiemi infiniti: storia del Paese dei Beoni, del loro colto e buon re e del suo incompetente primo ministro.

21 novembre 2005, lunedi(2 ore)

Quantità di elementi di un insieme: cardinalità.
Insiemi numerabili: scrittura in forma di successione.
Esercizio: A,B numerabili implica $A\cup B$ numerabile.
Oss: se un insieme è infinito allora esso contiene un sottoinsieme proprio con la stessa quantità di elementi.
Esercizio: ogni sottoinsieme infinito di un insieme numerabile è esso stesso numerabile.
Esercizio: $\mathcal{N}\times\mathcal{N}$ è un insieme numerabile.
Esercizio: A,B numerabili implica $A\times B$ è numerabile
Memento: $(0,1)$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}-\mathcal{Q}$ non sono numerabili.
Oss: avevamo imparato che tra due numeri razionali arbitrari c'e' sempre un numero irrazionale e viceversa. Nonostante questo, da quanto fatto finora emerge che i numeri irrazionali sono molti di piu' dei numeri razionali.
Esercizio: mostrare che $\#[a,b]=\#[c,d]$, trovando esplicitamente una corrispondenza biunivoca.
Esercizio: dimostrare che $f:\mathcal{R}\to(0,1)$ definita da $f(x)=\frac{1}{\pi}\arctan x+\frac{1}{2}$ è biunivoca.
Esercizio: trovare esplicitamente una corrispondenza biunivoca tra (a,b) e $[a,b]$.
Esercizio: Un'unione numerabile di insiemi numerabili è anch'essa numerabile (due modi).

Oss: dato un numero cardinale, ne esiste sempre uno maggiore (preso un insieme M, considerando l'insieme delle parti di M , $\mathcal{P}(\mathcal{M})$, si ha $\#M < \#\mathcal{P}(\mathcal{M})$).
Serie numeriche: commenti ed approfondimenti su convergenza semplice e convergenza assoluta.
Memento: assoluta convergenza implica convergenza semplice, ma non viceversa.
Oss: Se $\sum_{n-1}^{+\infty} a_n$ converge semplicemente ma non assolutamente, si ha che $\sum_{n-1}^{+\infty} a_n^+$ e $\sum_{n-1}^{+\infty} a_n^-$ sono infinite.
Riordinamenti: posto $c = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$, si ottiene $\frac{3}{2}c = c$. Che cosa non funziona?
Teorema: se $\sum_{n-1}^{+\infty} a_n$ è una serie convergente, ma non assolutamente convergente, allora $\forall\ \lambda \in \mathcal{R}$ esiste un riordinamento b_n di a_n tale che $\sum_{n-1}^{+\infty} b_n = \lambda$.
Teorema: se $\sum_{n-1}^{+\infty} a_n$ è una serie assolutamente convergente con somma S , allora un qualunque riordinamento b_n di a_n è tale che $\sum_{n-1}^{+\infty} b_n$ è assolutamente convergente ed ha somma S .

28 novembre 2005, lunedi(2 ore)

Lo spazio $L^\infty(A)$, $A \subset \mathcal{R}$.
Successioni di funzioni: convergenza puntuale e convergenza uniforme.
Oss 1: convergenza uniforme implica convergenza semplice, ma non viceversa (esempio: $f_n(x) = x^n$, $x \in (0,1)$) .
Oss 2: limite puntuale di funzioni continue non è detto che sia continuo; limite puntuale di funzioni derivabili non è detto che sia derivabile; limite puntuale di funzioni integrabili non è detto che sia integrabile.
Esempi: $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$; $f_n(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \frac{1}{n} \\ 1 - n|x| & |x| < \frac{1}{n} \end{cases}$; f_n funzione caratteristica dei primi n razionali dell'intervallo $[0,1]$.
Teorema: limite uniforme di funzioni continue è continuo.
Esercizio: studiare la convergenza della successione $f_n(x) = n^p x e^{-nx}$, $x \in [0,1]$.
Esercizio: siano $f_n : A \to \mathcal{R}$, $||f_n||_\infty \leq M \quad \forall\ n \in \mathcal{N}$. È vero che $\frac{f_n}{n}$ converge a 0 uniformemente? Vale il viceversa?
Convergenza uniforme ed integrazione: siano $f_n : [a,b] \to \mathcal{R}$ continue. Allora se f_n converge ad f uniformemente si ha

$$\lim_n \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_n f_n(x)dx$$

(il teorema non è vero in generale se il dominio non ha misura finita : esempio).

Esercizio: confrontare l'integrale del limite con il limite dell'integrale della successione $f_n(x) = n^p x e^{-nx}$, $x \in [0,1]$ precedentemente studiata.
Convergenza uniforme e derivazione: siano $f_n : [a,b] \to \mathcal{R}$ continue insieme alle loro derivate. Allora se f_n converge ad f puntualmente ed f_n' converge a g uniformemente si ha che f è continua insieme alla sua derivata ed $f'(x) = g(x)$.
Oss: dalle ipotesi del teorema prececente si ha che $f_n \to f$ anche uniformemente in $[a,b]$.

05 dicembre 2005, lunedi(2 ore)

Esercizio: siano $f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$, $x \in [-1,1]$. Trovare $\lim_n f_n(x)$ e dimostrare che la convergenza non è uniforme. Dimostrare che tuttavia
$\lim_n \int_{-1}^{1} f_n(x)dx = \int_{-1}^{1} \lim_n f_n(x)dx$.
Accenni alla completezza di $L^\infty(A)$.
Serie di funzioni: convergenza puntuale e convergenza uniforme.
Oss: somma di una serie puntualmente convergente di funzioni continue non è detto che sia continua. Esempio con una serie di funzioni che converge puntualmente alla funzione di Heaviside.
Teorema: somma di una serie uniformemente convergente di funzioni continue è continua.
Oss: condizione necessaria (ma non suff.) affinchè una serie di funzioni f_n converga uniformemente su A è che f_n converga uniformemente a 0.
Criterio di convergenza uniforme (test di Weierstrass): siano $f_n : A \to \mathcal{R}$ tali che $|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall\, x \in A$. Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ converge uniformemente.}$$

Non vale il viceversa: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$, $x \in (0,1)$.

Esercizio: dimostrare che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}$ converge uniformemente in $[0,a]$, $\forall\, a > 0$, ma non in $[0,+\infty)$.

Convergenza uniforme di serie ed integrazione: se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è uniformemente convergente si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx \ .$$

L'insieme di CANTOR C .
Costruzione dell'insiene C come intersezione numerabile di particolari chiusi , $C = \cap_{n=1}^{\infty} C_n$ e descrizione dell'insieme tramite la caratterizzazione della scrittura dei suoi punti in base 3 , $C = \left\{ x \in [0,1] \ , \ x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \ , \ a_n \in \{0,2\} \right\}$.
Esercizio: l'insieme di Cantor non ha punti interni e la sua misura è nulla.

12 dicembre 2005, lunedi(2 ore) FORSE

Esercizio: l'insieme di Cantor non contiene solo i punti estremi degli insiemi C_n. Verificare che $\frac{1}{4} \in C$. Dimostrare che ogni punto di C è limite di punti estremi di C_n .
Esercizio: l'insieme di Cantor non è numerabile (due modi: costruendo una biezione tra C e $[0,1]$ oppure ragionando per assurdo) .
L'insieme di Cantor ingrassato: sulla falsariga della costruzione dell' insieme di Cantor si costruisce un insieme che non ha punti interni, ma con misura η , $\eta \in (0,1)$. Questo fa capire come non sia possibile vedere la misura di un insieme chiuso come estremo superiore delle misure degli aperti contenuti.
Esempio di un insieme aperto, denso in $\mathcal{R}^2$, con misura arbitrariamente piccola (e quindi con frontiera di misura infinita; tale frontiera è un altro esempio di chiuso che non ha punti interni, ma misura positiva) .

L'integrale di Lebesgue: riassunto delle principali proprietà, dei principali teoremi e dell'uso della notazione "quasi ovunque (q.o.) ".
Esercizio: sia $f : A \to \mathcal{R}$ misurabile, $A \subset \mathcal{R}$, A misurabile. Dimostrare che se $\displaystyle\int_E f(x)dx = 0 \ \ \forall\, E \subset A$, E misurabile, allora $f(x) = 0$ q.o. in A.
Esercizio: sia $f : A \to \mathcal{R}$ misurabile, $f \geq 0$, $A \subset \mathcal{R}$, A misurabile. Dimostrare che $m\left(\{x \in A \ : \ f(x) \geq \alpha\}\right) \leq \frac{1}{\alpha} \displaystyle\int_A f(x)dx \quad \forall\, \alpha > 0$.
Esempio di una successione convergente di funzioni misurabili $f_n(x)$ tale che

$$\int_A \lim_n f_n(x)dx \neq \lim_n \int_A f_n(x)dx \ .$$

Con tale successione non si può applicare il teorema della convergenza dominata, perchè?
Esempio che nel lemma di Fatou può valere il minore stretto.
Calcolare, al variare del parametro $\alpha \in \mathcal{R}$, $\displaystyle\lim_n \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n}$.