ESERCIZI “ È arrivata veramente! ”

1) Sia $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$. Dimostrare che $\lim_n f_n(x) = 0$, $\forall\ x \in [-1, 1]$.
Dire se la convergenza è uniforme

2) Dimostrare che la successione $f_n(x) = (1-x)x^n$ converge uniformemente a zero nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$

3) Sia $f_n(x) = n^p (\sin x)^n \cos x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $p \in \mathcal{R}$. Trovare $\lim_n f_n(x)$ e dimostrare che la convergenza è uniforme se e soltanto se $p < \frac{1}{2}$

4) Sia $f_n(x) = \frac{1}{x^n}$, $x \in [1, +\infty)$. Trovare $\lim_n f_n(x)$ e $\lim_n f'_n(x)$;
dimostrare che la convergenza è uniforme in $[a, +\infty)$, $\forall\ a > 1$,
ma non in $(1, +\infty)$

5) Dimostrare che le serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^{\frac{3}{2}}}$ convergono uniformemente in $\mathcal{R}$

6) Calcolare $\displaystyle\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}\, dx$

7) Dimostrare che la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge uniformemente ad e^x sui compatti, ma non su tutto $\mathcal{R}$ (ricordare la condizione necessaria affinchè una serie converga uniformemente)

8) Dimostrare che $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\ dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$

9) Dimostrare che la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ converge alla funzione
$S(x) = \begin{cases} 1+x^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ (osservare che è una serie geometrica).
Studiare se e dove la convergenza è uniforme (considerare la successione delle somme parziali $S_N(x)$)

10) Mostrare con un esempio che in generale il limite uniforme di funzioni lipschitziane non è lipschitziano