

ESERCIZI Γνωθι Σεαυτον

- 1) Mostrare che $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x + y^2 + y = 0$ definisce $y = g(x)$ in un intorno di $(x, y) = (0, 0)$. Calcolare $g'(0)$, $g''(0)$.
- 2) Mostrare che $f(x, y) = x^2 + e^{xy} - 2y^3 - 2 = 0$ definisce $y = g(x)$ in un intorno di $(x, y) = (1, 0)$. Calcolare $g'(1)$, $g''(1)$.
- 3) Mostrare che $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x + y^2 + y = 0$, $h(x, y) = x^5 + y^5 + x + y^2 + 10y = 0$, $l(x, y) = x^3 + y^4 + x + y^2 + 7y = 0$, $s(x, y) = x^7 + y^6 + x + y^2 + 13y = 0$ definiscono rispettivamente $y = y(x)$ in un intorno di $(x, y) = (0, 0)$. Calcolare le varie $y'(0)$, $y''(0)$.
- 4) Posto $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine due della funzione $y = g(x)$ definita implicitamente dall'equazione $f(x, y) = 0$ in un intorno di $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.
- 5) Sia $f(x, y) = xe^y + 3y - 6$:
 - a) trovare tutti i punti (x_0, y_0) tali che $f(x_0, y_0) = 0$ ma f nel punto non soddisfa le ipotesi del teorema della funzione implicita per l'esplicitabilità di y in funzione di x
 - b) scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine due della funzione $y = g(x)$ definita implicitamente dall'equazione $f(x, y) = 0$ in un intorno di $(0, 2)$.
- 6) Calcolare il Laplaciano delle seguenti funzioni:
$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad g(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad h(x, y) = e^{\lambda x} \cos(\lambda y),$$
$$t(x, y) = \ln(x^2 + y^2), \quad s(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \neq 0.$$
- 7) Determinare $a, b, c, d \in \mathcal{R}$ di modo che, per ogni $f : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}$ tale che $\Delta f = 0$, sia anche $\Delta F = 0$, dove $F(x, y) = f(ax + by, cx + dy)$. Le condizioni trovate, considerati (a, b) , (c, d) come vettori, che cosa significano?