ESERCIZI " QUO VADIS? "

1) Studiare le derivate direzionali di $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ in $(x,y) = (0,0)$.

2) Studiare le derivate direzionali di $f(x,y,z) = |x+y+z|$ in $(x,y,z) = (1,-1,0)$

3) Sia $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Dire per quali direzioni α esiste $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(0,0)$; per tali α calcolarla.

4) La derivata direzionale può essere generalizzata a qualunque vettore $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0)$, non necessariamente di lunghezza unitaria, ponendo $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x_0,y_0) = \lim_{t \to 0} \dfrac{f(x_0 + t\alpha_1, y_0 + t\alpha_2) - f(x_0,y_0)}{t}$.
Dimostrare che, con $|\alpha| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ ed $\alpha_u = (\frac{\alpha_1}{|\alpha|}, \frac{\alpha_2}{|\alpha|})$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x_0,y_0) = |\alpha| \frac{\partial f}{\partial \alpha_u}(x_0,y_0)$$

5) Sia $f : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ differenziabile in (x_0,y_0) . Mostrare che

$$\frac{\partial f}{\partial(\alpha+\beta)}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial \beta}(x_0,y_0).$$

Posto $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, mostrare che

$$\frac{\partial f}{\partial(1,1)}(0,0) \neq \frac{\partial f}{\partial(0,1)}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial(1,0)}(0,0).$$

6) Sia $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Dimostrare che f è continua su $\mathcal{R}^2$ e che è derivabile in qualunque direzione, ma non è differenziabile (l'unico punto dubbio è $(0,0)$).