ESERCIZI " In successione..... "

1) Sia $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}\sin\frac{x}{n} & x \in [0, n\pi] \\ 0 & x > n\pi \end{cases}$. Dire se sono vere

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lim_n f_n(x)dx = \lim_n \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$

b) $\displaystyle\int_0^{1} \lim_n f_n(x)dx = \lim_n \int_0^{1} f_n(x)dx$.

2) Dire se $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_n \frac{n^2}{x^2+n^2}dx = \lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n^2}{x^2+n^2}dx$. Dimostrare l'affermazione sia con un conto diretto che con l'uso di qualche teorema appropriato.

3) Sia $f_n(x) = \begin{cases} n^2x & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 2n - n^2x & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$.

Vale $\displaystyle\int_0^{1} \lim_n f_n(x)dx = \lim_n \int_0^{1} f_n(x)dx$? Perchè non sono applicabili i teoremi della convergenza dominata e della convergenza monotona?

4) Dire se sono vere le seguenti affermazioni:

i) $f \geq 0$ misurabile $\Longrightarrow \lim_n \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx = 0$

ii)$f \geq 0$ misurabile e $\displaystyle\int_0^{1} f(x)dx < +\infty \Longrightarrow \lim_n \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx = 0$

iii) $f \geq 0$ continua in $(0,1)$ $\Longrightarrow \lim_n \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx = 0$

iv) $f \geq 0$ continua in $[0,1]$ $\Longrightarrow \lim_n \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx = 0$

5) Sia $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n$. Calcolare $\displaystyle\int_0^{1} \lim_n f_n(x)dx$ e $\displaystyle\lim_n \int_0^{1} f_n(x)dx$; spiegare perchè non si applicano i teoremi della convergenza dominata e della convergenza monotona.

6) Calcolare

i) $\displaystyle\lim_n \int_0^{1} \frac{dx}{n(\sqrt{x}+\sin^2 x)}\ dx$ (R: 0)

ii) $\lim_n \int_0^1 e^{-nx^2}\ dx$ (R: 0)

iii) $\lim_n \int_0^1 \frac{dx}{n(2+\sin\frac{1}{x})\ln x}\ dx$ (R: $-\infty$)

vi) $\lim_n \int_n^{n+1} \frac{e^{\sin x}}{x^2}\ dx$ (R: 0)

7)* Sia $f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0\ ,\ x \ge 1 \\ n^3 x & x \in (0, \frac{1}{n^2}) \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & x \in [\frac{1}{n^2}, 1) \end{cases}$.

Verificare che $\lim_{n,m} \int_{\mathcal{R}} |f_n(x) - f_m(x)|\ dx = 0$ (cioè la successione f_n è di Cauchy nella norma $||g||_{L^1(\mathcal{R})} = \int_{\mathcal{R}} |g(x)| dx$).

Calcolare $\lim_n \int_{\mathcal{R}} f_n$, sia direttamente che con l'uso di qualche teorema appropriato.

8)* Sia $A = \left\{ x \in [0,1]\ ,\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}\ ,\ a_n \neq 7\ \forall\ n \in \mathcal{N} \right\}$.

Dimostrare che la misura di A è nulla.

9)* Sia N un insieme di misura nulla. Mostrare che l'insieme $N^* = \{x^3\ ,\ x \in \mathcal{N}\}$ ha misura nulla.

10)* Dire se l'insieme dei numeri irrazionali di $\mathcal{R}$ si può scrivere come intersezione numerabile di aperti. Notazione: un insieme che è un'intersezione numerabile di aperti si suole chiamare G_δ ed un insieme che è un'unione numerabile di chiusi si suole chiamare F_σ.

L'esercizio può essere quindi enunciato così: l'insieme dei numeri irrazionali di $\mathcal{R}$ è un G_δ ?

11)

12)

...

n)

...

...