# ESERCIZI “ SUPERFICIALI ”

1) Calcolare l’area della superficie

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathcal{R}^3 \;:\; x^2+y^2+z^2 = 10 \;,\; z \geq 2\sqrt{x^2+y^2} \right\}$$

2) Calcolare l’integrale superficiale $\displaystyle\int_S \frac{1}{\rho^2}\, d\sigma$ , dove $\rho = \rho(x,y,z)$ indica la distanza tra il punto $(x,y,z)$ e $(0,0,0)$ , ed $S$ è la parte del cilindro $\left\{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3 \;:\; x^2+y^2 = R^2\right\}$ compresa tra i piani $z=0$ e $z=1$

3) Calcolare l’integrale superficiale $\displaystyle\int_\Sigma (x+y+z)\, d\sigma$ , dove $\Sigma$ è la parte della sfera unitaria contenuta in $\{x>0 \;,\; y>0 \;,\; z>0\}$

4) Usare la formula di Gauss-Green per calcolare $\displaystyle\int_{\S\gamma} 3y^3 dx + x dy$ , dove $\gamma$ è la frontiera del quadrato di vertici $(0,0)$ , $(2,0)$ , $(2,2)$ , $(0,2)$ , percorsa in senso antiorario

5) Calcolare $\displaystyle\int_{\partial B_1(0,0,0)} (x^4+y^4+z^4)\, d\sigma$

6) Calcolare $\displaystyle\int_{\partial B_1(0,0,0)} (x+y+z)\, d\sigma$
(calcolo diretto ed calcolo con l’uso del teorema della divergenza)

7) Calcolare il flusso di

$$V(x,y,z) = (0,0,f(x,y))$$

attraverso la superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3 \;:\; x^2+y^2+z^2 = 1 \;,\; z \geq 0\right\}$ , quando

a) $f(x,y) = \frac{1}{r^\alpha}$ , $\alpha < 2$ , $r = \sqrt{x^2+y^2}$
b)$f(x,y) = \arcsin(x^2+y^2)$
c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}e^{\sqrt{x^2+y^2}}$
d) $f(x,y) = \sin^2(x^2+y^2)$

8) Calcolare il flusso di

$$V(x,y,z) = (xz^2, x^2y - z^3, 2xy + y^2z)$$

attraverso la superficie $\Sigma = \partial D$ , dove

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \ , \ z \geq 0\right\}$$

9) Sia $G = \left\{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3 \ : \ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\right\}$ .
Calcolare il flusso di

$$V(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

attraverso la superficie $\partial G$

10) Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_\Sigma \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2}\right) \ z \ d\sigma$ , dove

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3 \ : \ \tfrac{x}{a^2} + \tfrac{y}{b^2} + \tfrac{z}{c^2} = 1 \ , \ z > 0\right\}$$

ed $\alpha, \beta, \gamma$ sono le componenti della normale esterna a $\Sigma$

11) Sia $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = 1 \ , \ 0 < z < x + 2\right\}$ ,
siano $V(x,y,z) = (y,z,x)$ , $N(x,y,z) = \frac{(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ .
Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_\Sigma rotV \bullet N \ d\sigma$