ESERCIZI " SEGOLENE "

1. È possibile definire $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ in $(0,0)$ affinchè sia continua?

2. È possibile scegliere λ in $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 \ \ , \ x^+y^2 \leq 1 \\ \lambda - x^2 - y^2 \ , \ x^2+y^2 > 1 \end{cases}$ affinchè sia continua? E affinchè sia differenziabile?

3. Calcolare le derivate parziali prime delle seguenti funzioni:

$$u(x,y) = x \arctan \frac{y}{x} \quad , \quad v(x,y) = \ln \left(xy^2 + x^2y + \sqrt{1 + (xy^2 + x^2y)^2} \right)$$

4. Calcolare il gradiente, il Laplaciano e l'Hessiano delle seguenti funzioni:

$$f(x,y) = x^2 + y \quad , \quad g(x,y) = xy^3 \quad , \quad h(x,y) = \sin x \cos y$$

5. Dimostrare che $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x-y}$

6. Sia $f(x,y) = \ln(e^x + e^y)$. Verificare che $f_x + f_y = 1$

7. Sia $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Dimostrare che f è continua in $(0,0)$, ma ivi non differenziabile

8. Sia $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x-y} & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$. Verificare che $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$ esistono finite, ma f è discontinua in $(0,0)$ (hint: provare i percorsi $x + x^n$ oppure passare a polari)

9. Calcolare l'equazione del piano tangente alla funzione

$$f(x,y) = x^2 + y + \ln(xy)$$

corrispondente al punto (e,e)