ESERCITAZIONI di ANALISI MATEMATICA - A.A.2006/07 - UD1

15/09/06 venerdi (2 ore)

Chiacchierata su simboli matematici, negazioni di affermazioni e dimostrazione per assurdo. Ripasso sulla definizione dell'estremo superiore ed inferiore. Introduzione della caratterizzazione dell'estremo superiore ed inferiore. Cenno alle successioni di numeri reali ed alla nozione di monotonia con eventuali realazioni tra la ricerca degli estremi e la monotonia.
Esercizio: calcolare l'estremo inferiore e superiore dell'insieme $A = \left\{ \frac{n}{n+1} \ , \ n \in \mathbf{N} \right\}$
(approcci diversi per la risoluzione).

22/09/06 venerdi (2 ore)

Esercizio: calcolare l'estremo inferiore e superiore dell'insieme $A = \{ \sqrt{x^2+1} - x \ , \ x \in \mathbf{R} \}$.
Esercizio: calcolare l'estremo inferiore e superiore dell'insieme $A = \{ \frac{1}{n} + [1 + (-1)^n]n \ , \ n \in \mathbf{N} \}$.
Esercizio: sia $A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$. Poniamo $-A = \{-a \ , \ a \in A\}$.
Dimostrare (con l'uso della definizione) che $\sup(-A) = -\inf A$.
Esercizio: calcolare l'estremo inferiore e superiore dell'insieme $A = \{ x \in \mathbf{R} \ , \ x + x^3 \leq 6 + x^2 \}$.
Esercizio: calcolare l'estremo inferiore e superiore dell'insieme $A = \{ n \in \mathbf{N} \ , \ n + \frac{100}{n^2} \}$.
Distribuzione del foglio di esercizi per casa: Esercizi "TELECOM".

29/09/06 venerdi (2 ore)

Esercizio: (i razionali sono densi nel sistema dei numeri reali)
dati due numeri reali positivi x ed y con $x < y$, dimostrare che esiste almeno un punto razionale r tale che $x < r < y$.
Oss: trovato $r \in \mathbf{Q}$, si trova subito anche un punto irrazionale i tale che $x < i < y$.
Limiti: finiti, infiniti e all'infinito, definizioni.
Forme indeterminate: $+\infty + (-\infty)$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$
Esempi: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$, $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1}$, $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,
$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+1}$, $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $\lim_{x\to +\infty} x^2 - x$, $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-x+3}{2x}$
Esercizio: $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$, $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$, $\lim_{x\to 0+} \frac{x+1}{2x}$ (dimostrazione con l'uso della definizione).
Discorsetto sul quoziente di potenze di x , nel caso $x \to +\infty$. Esempi di ogni tipo.
Distribuzione del foglio di esercizi per casa: Esercizi della FINANZIARIA.

04/10//06 giovedi (2 ore)

Esercizio: calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$.
Esercizio: calcolare $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x}$, $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$, $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos^3 x}$.

Osservazione : $\lim_{x\to x_o} f(x) = L \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_o} |f(x)| = |L|$ ($\not\Leftarrow$: esempio)
Memento: $\lim_{x\to x_o} f(x) = 0$, $|g(x)| \le M$ in un intorno di x_o $\Rightarrow$ $\lim_{x\to x_o} f(x)g(x) = 0$.
Esercizio: calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x^2}$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x}$.
Esercizio: calcolare $\lim_{x\to+\infty} x^2 - \frac{1}{1-\cos\frac{1}{x}}$ (accenno al cambio di variabile nei limiti; qui $\frac{1}{x} = t$)
Problema:
supponiamo $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$; cosa possiamo dire di $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3}$?
Esercizio: se $|f(x)| \le |x|\ \forall x$, allora f è continua in 0 e si ha $f(0) = 0$.
Osservazione importante. Sia $f : (a,b) \to \mathbf{R}$, sia $x_o \in (a,b)$. Sono equivalenti:
i) $\lim_{x\to x_o} f(x) = L$
ii) per ogni successione $x_n \in (a,b)$, $x_n \neq x_o$ $\forall n \in \mathbf{N}$, $x_n \xrightarrow{n} x_o$, si ha $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L$
Esercizio: $\lim_{x\to+\infty} \sin x$, $\lim_{x\to+\infty} \cos x$ non esistono.
Distribuzione del foglio di esercizi per casa: Esercizi del DIROTTAMENTO.

11/10/04 giovedi (2 ore)

Usando la caratterizzazione del limite mediante successioni, risoviamo i seguenti esercizi:
1) calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1}\cos(x^2)$.
2) dimostrare la continuità del logaritmo
3) studiare:

- $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ 0 & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$ (funzione di Dirichlet, discontinua in ogni punto)
- $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbf{Q} \\ 0 & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$ (continua solo in 0)

Esercizio: calcolare $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^3)}{x^3}$, $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} \frac{e^{-\tan x}}{\tan x}$, $\lim_{x\to 2} \frac{e^{x-2}-1}{x-2}$.
Commento sulla "velocità" dell'esponenziale e del logaritmo rispetto a quella dei polinomi. Commento sull'uso della forma esponenziale nel calcolo dei limiti. Esempio: calcolare $\lim_{x\to 1^+} (x-1)^{3x-3}$
Principio d' induzione (per una proposizione dipendente da n; sia essa P(n)):
affinchè una proposizione P(n) sia vera $\forall n \ge n_0$ è suff. dimostrare che $\begin{cases} P(n_0) \text{ è vera} \\ P(n) \text{ vera } \Rightarrow P(n+1) \text{ vera} \end{cases}$
Esempi: $n! > 3^n$ $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \ge 7$, $n! > 2^n$ $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \ge 4$,
$\sum_{k=1}^{n} q^n = \frac{q - q^{n+1}}{1-q}$, $q \neq 1$ (formula ricavata con semplici calcoli) .
Esercizio: ricavare che $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ e verificare la formula per induzione (vedi il foglio di esercizi per casa dato in questa lezione.

Distribuzione del foglio di esercizi per casa: Esercizi delle IENE.

18/10/04 giovedi (2 ore)

Commenti vari sugli esercizi a casa e sulla lezione precedente.
Discorsetto riassuntivo sulle derivate e le loro proprietà.
Esercizio: calcolare le derivate delle funzioni :
$h(x) = \sqrt{x^3}$, $f(x) = \frac{3x^2+x}{\sqrt{x}}$, $g(x) = (2x+1)(3x+4)(5x+7)$, $l(x) = \sin x$.
Esercizio: calcolare, se esiste, la derivata di $f(x) = x|x|$.
Esercizio: calcolare $\lim_{x\to 1} \dfrac{\log x}{x-1}$, $\lim_{x\to 2} \dfrac{e^{x-2}-1}{x-2}$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$, $\alpha > 0$, guardandoli come limiti di rapporti incrementali.
Derivata della funzione composta: $[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$ (memento: $\left[f(x)^{g(x)}\right]'$); esempi vari.
Esercizio: calcolare le derivate delle funzioni $(\arctan x)^2$, $\arctan(x^2)$, $(\arctan(x^2))^2$.
Esercizio: sia $f(x) = \begin{cases} x^3 & se\ x \le 1 \\ ax+b & se\ x > 1 \end{cases}$; determinare $a, b \in \mathbf{R}$ in modo che f sia continua e derivabile $\forall x \in \mathbf{R}$.
Distribuzione del foglio di esercizi per casa: Esercizi della METROPOLITANA.

25/10/06 giovedi (2 ore)

Proprietà importante: sia f continua in x_o ; $\exists f'(x)$ per $x > x_o$; $\exists f'(x)$ per $x < x_o$;
$\exists \lim_{x\to x_o^+} f'(x) = A$; $\exists \lim_{x\to x_o^-} f'(x) = B$; allora
 i) se $A = B \Rightarrow \exists f'(x_o) = A = B$
 ii) se $A \neq B \Rightarrow \nexists f'(x_o)$
Osservazione: se siamo nelle ipotesi precedenti, ma $\nexists \lim_{x\to x_o^+} f'(x)$ o $\nexists \lim_{x\to x_o^-} f'(x)$, non è detto che non esista $f'(x_o)$.
Studiamo:

- $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \in (-1,1) - \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ (non continua in 0)
- $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x \in (-1,1) - \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ (continua in $(-1,1)$, ma non derivabile in 0)
- $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x \in (-1,1) - \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ (continua e derivabile in $(-1,1)$)

Uso delle derivate per risolvere equazioni (trovare gli zeri di una funzione), risolvere disequazioni (confronto tra funzioni) e in generale studiare funzioni: ecco un esempio di ogni tipo di problema.
Esercizio: dimostrare che l'equazione $x^5 - 82x + \alpha = 0$ ha al più una soluzione in $[-2,2]$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$ (ossia, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, la funzione $x^5 - 82x + \alpha$ si annulla in non piú di un punto dell'intervallo $[-2,2]$).
Esercizio: dimostrare che $(1+x)^n \ge 1+nx$ $\forall x \ge -1$, $\forall n \in \mathbf{N}$ (già visto per induzione, affrontato ora come raffronto tra funzioni ed ancora usando la convessità).
Esercizio: studiare in dettaglio la funzione $f(x) = \sqrt{\frac{8}{x} + x + |1 - \frac{8}{x}|}$.

Distribuzione del foglio di esercizi per casa: Esercizi del PAPA.

25/10/06 giovedi (2 ore)

Esercizi in vista del compito del 2 novembre.

26/10/06 venerdi (2 ore)

Osservazione: se $|f(x)| \leq x^2 \ \forall x$, allora esiste la derivata prima di f in 0 e si ha $f'(0) = 0$.
Con questa osservazione potevamo avere immediatamente la derivabilità di funzioni studiate precedentemente.
Esempio di funzione derivabile in un sol punto: $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbf{Q} \\ 0 & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$.
Esercizio: dire quante soluzioni ha l'equazione $e^x - ax = 0$ al variare di $a \in \mathbf{R}$.
(due metodi di risoluzione).
Esercizio: si può trovare una funzione continua e derivabile $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, $f(0) = -1$, $f(1) = 1$, $f'(x) < 2 \quad \forall x \in (0,1)$? (due metodi di risoluzione)
Esercizio: studiare in dettaglio la funzione $f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & x \geq 1 \\ \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x} & x < 1 \end{cases}$
Esercizio per casa : dimostrare che $(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n) \ \ \forall x, y \geq 0$, $\quad \forall n \in \mathbf{N}$
(affrontato come studio di funzione ed ancora usando la convessità).