ESERCITAZIONI di ANALISI MATEMATICA - A.A.2006/07 - UD2

09/11/06 giovedi (2 ore)

Teorema di de l' Hôpital; esempi: $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x\cos x}{x^3}$,
$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x}$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos 2x}$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$.
Osservazione: se $\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} = \frac{\infty}{\infty}$ e $\nexists \lim_{x\to x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, non si può dedurne che $\nexists \lim_{x\to x_o} \frac{f(x)}{g(x)}$.
Si prenda ad esempio $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x}$ oppure $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x}$.
Esercizio: $\lim_{x\to 0} \left[\frac{x+1}{x} - \frac{1}{\log(x+1)}\right]$.
Definizione: sia $g(x)$ infinitesimo quando $x\to x_o$. Diremo che $o(g(x))$ è un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$, quando $x\to x_o$, se vale $\lim_{x\to x_o} \frac{o(g(x))}{g(x)} = 0$. Esempio: $\sin^3 x = o(x^2)$.
Esercizi: $2e^{\sqrt{x}} - e(x+1)$ è $o(x-1)$ per $x\to 1$; $(1-\sin x)^2$ è $o(\cos^2 x)$ per $x\to\frac{\pi}{2}$.
Infinitesimi particolari: $o(x^n)$, detti infinitesimi di ordine n per $x\to 0$.
Algebretta degli infinitesimi di ordine n.
Definizione: siano f, g due funzioni infinitesime per $x\to x_o$.
$f(x)$ di dice asintoticamente equivalente a $g(x)$, per $x\to x_o$ (e si denota con $f\sim g$) quando $\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Quando $\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = L\in\mathbf{R}$ si dice che f e g sono dello stesso ordine.
Esempio: $x(1-\cos x)\sim 3(x-\sin x)$, quando $x\to 0$.
Esercizio: dimostrare che $\frac{1}{\tan x}\sim\frac{\pi}{2}-x$, quando $x\to\frac{\pi}{2}^-$.
Osservazione: ci sono infinitesimi che non sono confrontabili, ad esempio $f(x)=\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$ e $g(x)=x$, quando $x\to 0^+$.
Distribuzione del foglio di esercizi per casa: Esercizi “SADDAM”.

16/11/06 giovedi (2 ore)

Formula di Taylor: commenti, sviluppo di $\ln(1+x)$.
Esercizio: calcolare i seguenti limiti mediante l'uso della formula di Taylor:
$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{x-\log(1+x)}{1-\cos x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{e^x-1}$.
Praticità dello sviluppo di Taylor: passaggio da e^x a e^{x^3} , da $\frac{1}{1-x}$ a $\frac{1}{1+x}$ e da $\ln(1+x)$ a $\ln(1+x^2)$.
Esercizio: calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{\sin x}}{x}$ e vedere che $e^{\sin x} = 1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)$ in un intorno di 0.
Problema (affrontato con de l' Hôpital e con Taylor): $\exists a\in\mathbf{R}$ tale che
$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^x-x}{x^2} = L < +\infty$? Quant'è L?
Distribuzione del foglio di esercizi per casa: Esercizi “RUMSFIELD ”.

21/11/06 martedi (2 ore)

Esercizio: scrivere il polinomio di Taylor di grado 3 di $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ in un intorno di 0 (scrittura del binomio di Newton e della serie binomiale).
Esercizio: calcolare $\ln(\frac{11}{10})$ con un errore minore di un millesimo.
Esercizio: $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log^2(1+\sin x)}{x \tan x}$ (provare anche con L'Hôpital) .
Esercizio: calcolare, usando Taylor, $\lim_{y\to+\infty} \dfrac{e^{\left(\sin\frac{1}{y}\right)^{-2}}}{e^{y^2}}$, ovvero $\lim_{x\to 0^+} e^{\left[(\sin x)^{-2} - \frac{1}{x^2}\right]}$. Calcolare a casa tale limite anche con l'Hôpital.
Esercizio: scrivere il polinomio di Taylor di terzo grado della funzione $f(x) = \arctan x$ in $x_0 = 0$. Scrittura del polinomio di grado n .

23/11/06 giovedi (2 ore)

Definizione di primitiva e di integrale indefinito.
Calcolo di tutte le primitive delle funzioni elementari, a parte $\ln x$ e $\arctan x$.
Calcolo delle primitive di funzioni del tipo $f'(x)f(x)$, $\frac{f'(x)}{f(x)}$, $\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$, $f'(x)e^{f(x)}$.
Formula di integrazione per parti: $\int f'(x)g(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ dx.$
Esempio: calcolo della primitiva di $x \ln x$.
Osservazione: a volte può essere utile considerare $f(x)$ come $1f(x)$ e quindi come $(x)'f(x)$.
Esempi: calcolo delle primitive di $\ln x$ ed $\arctan x$.
Osservazione: Un polinomio $x^2 + bx + c$, che non ha radici reali, si può sempre scrivere nella forma $(x-\alpha)^2 + \beta^2$, dove $\alpha \pm i\beta$ sono le sue due radici complesse.
Primitive di quozienti di polinomi: è chiaro che, tramite la divisione di polinomi, ci si può ridurre a trattare il caso $\int \dfrac{P(x)}{Q(x)}\ dx$, con $gradP(x) < gradQ(x)$. Studieremo in dettaglio il caso $gradQ(x)$=2; ci sono tre possibilità:

- $Q(x)$ ha due radici reali a_1, a_2 distinte: in questo caso $Q(x)$ si può scrivere come $(x-a_1)(x-a_2)$ e $\frac{P(x)}{Q(x)}$ si può scomporre nella forma $\frac{A}{x-a_1} + \frac{B}{x-a_2}$; la primitiva sarà quindi del tipo $A \log|x-a_1| + B \log|x-a_2|$
- $Q(x)$ ha due radici reali a_1, a_2 coincidenti: in questo caso $Q(x)$ si può srivere come $(x-a_1)^2$ e $\frac{P(x)}{Q(x)}$ si può scomporre nella forma $\frac{C}{(x-a_1)} + \frac{D}{(x-a_1)^2}$; la primitiva sarà quindi del tipo $C \log|x-a_1| - \frac{D}{(x-a_1)}$
- $Q(x)$ non ha radici reali: in questo caso si può scrivere $Q(x)$ come somma di quadrati (osservazione fatta precedentemente) e le primitive da calcolare, a meno di costanti moltiplicative, saranno di funzioni della forma $\frac{1}{t^2+1}$ oppure $\frac{2t}{t^2+1}$, che sono rispettivamente $\arctan t$ e $\log(1+t^2)$

Esempio: $\displaystyle\int \frac{x^4-4x^3+3x^2+5x-4}{x^2-4x+4}\ dx.$
Osservazione: le funzioni continue hanno sempre primitive, ma non è detto che tali primitive si possano esprimere con funzioni elementari; ad esempio $\frac{e^x}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$, $\cos(x^2)$, $\frac{\sin x}{x}$ ed e^{x^2}.
Distribuzione del foglio di esercizi per casa: Esercizi del KGB.

01/12/06 giovedi (2 ore)

L'integrale definito ed il teorema fondamentale del calcolo.
Formula di integrazione per parti (già vista nella ricerca di primitive):
$\displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)\ dx = f(x)g(x)]_b^a - \int_a^b f(x)g'(x)\ dx$
La formula, già sfruttata precedentemente, è comoda anche per integrali del tipo
$\displaystyle\int_a^b x^n \sin(x)\ dx\ ,\ \int_a^b x^n \cos(x)\ dx\ ,\ \int_a^b x^n e^x\ dx\ .$
Esempio: $\displaystyle\int_0^{\lg 2} e^{2x}(2x+1)\ dx$
Osservazione: a volte l'applicazione ripetuta dell'integrazione per parti sembra portare all'integrale di partenza, ma se il coefficiente davanti è diverso, allora tutto funziona come ad esempio nel calcolo di $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x)\ dx$
Formula di sostituzione di variabile:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)\ dt$$

valida per $f \in C^0[a,b]$ e $\phi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ invertibile con $\phi \in C^1[a,b]$.
Esempi: $\displaystyle\int_0^1 2xe^{x^2}\ dx\ \ ,\ \ \int_0^1 \sqrt{2^x-1}\ dx$
Problemino: con la sostituzione $1+\frac{1}{x} = t$ si ottiene $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}\ dx = \frac{x}{x+1}$, mentre semplificando prima l'integrando ed arrivando così a dover calcolare $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2}\ dx$, si ottiene $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}\ dx = -\frac{1}{x+1}$; c'è qualcosa che non va?
Esercizio: $\displaystyle\int \frac{2x^3-3x^2+2x-4}{x^2+4}\ dx\ .$
Integrazioni particolari: $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)\ dx$. Se l'integrale non si riesce a calcolare con qualche trucco, fare la sostituzione $t = \tan\frac{x}{2}$ calcolando $\sin x$, $\cos x$ e dx in funzione di t , che porta sempre ad integrali di quozienti di polinomi.
Esercizio: calcolare $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\ dx$ con e senza sostituzione.

07/12/06 giovedi (2 ore)

Esercizio: calcolare $\displaystyle\int \frac{x^4-4x^3+3x^2+x}{x^2-4x+3}\,dx$, $\displaystyle\int \cos(\ln x)\,dx$.

Esercizio: calcolare $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\sin x\,dx$ con un errore minore di un centesimo.

Esercizio: è possibile trovare una funzione f continua, $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, $f(0)=0$, $0\le f\le 1$, tale che $\displaystyle\int_o^1 f(x)\,dx=1$?

Integrazioni particolari: $\displaystyle\int R\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)dx$ (con la sostituzione $\sqrt[n]{ax+b}=t$) ,

$\displaystyle\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, $ad-bc\ne 0$ (con la sostituzione $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$) ,

$\displaystyle\int R\left(x,\sqrt{x^2+bx+c}\right)dx$ (con la sostituzione $\sqrt{x^2+bx+c}=x+t$) .

Esercizio per casa: calcolare $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$.

Equazioni differenziali del primo ordine.

Caso lineare: esempio $\begin{cases} y'(x)-\sin x\; y(x)=e^{-\cos x} \\ y(0)=\frac{1}{e} \end{cases}$

14/12/06 giovedi (2 ore)

Risoluzione dei seguenti problemi di Cauchy: $\begin{cases} y'(x)=x^2y(x) \\ y(0)=1 \end{cases}$, $\begin{cases} y'(x)+y(x)=2xe^{-x} \\ y(0)=\pi \end{cases}$.

Risoluzione delle equazioni differenziali con il metodo della separazione di variabili.

Esercizio: risolvere con il metodo della separazione di variabili i seguenti problemi di Cauchy: $\begin{cases} y'(x)=y(x)(1+\tan^2 x) \\ y(0)=1 \end{cases}$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $\begin{cases} y'(x)y(x)=x \\ y(0)=2 \end{cases}$.

Accenno a due gruppi di equazioni differenziali riducibili a variabili separabili:

1) $y'(x)=f(\frac{y}{x})$ (sostituzione con $u=\frac{y}{x}$, esempio $y'=\frac{2y}{x-y}$)

2) $y'(x)=f(ax+by)$ (sostituzione con $u=ax+by$, esempio $y'=2x+y$)

Distribuzione di un foglio di esercizi per casa “”.

21/12/06 giovedi (2 ore)

Riassunto sulle equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti.

Esercizio: risolvere l'equazione $y''-7y'+12y=0$;

risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y''-7y'+12y=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$.

Esercizio: risolvere l'equazione $y''-7y'+12y=x^2$, l'equazione $y''-7y'+12y=2e^x$ ed il caso speciale $y''-7y'+12y=2e^{3x}$.

Esercizio: risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 9y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$

Domanda: se invece di "posizione e velocità" iniziali, come nel problema di Cauchy, si avessero condizioni diverse, ad esempio due condizioni di posizione, che cosa cambierebbe?

Esempi: $\begin{cases} y'' + 9y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\frac{\pi}{3}) = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} y'' + 9y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\frac{\pi}{3}) = 1 \end{cases}$.

Esercizio: dire se esiste una soluzione del problema $\begin{cases} y'' - y = e^{-x} \\ y(0) = \frac{2}{3} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0 \end{cases}$.

Esercizio: risolvere le equazioni differenziali $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$ e $y'' + 16y = 3\cos(4x)$.

Osservazione: nel caso si debba cercare una soluzione particolare di un'equazione diff. lineare $D(y) = f + g$, grazie alla linearità si potrà cercare una soluzione particolare di $D(y) = f$,
sia essa y_f, ed una soluzione particolare di $D(y) = g$, sia essa y_g, ottenendo con $y_f + y_g$ tale soluzione. Esempio: $y'' - 2y' + y = e^{3x} + x^2$.

Il metodo di variazione delle costanti: si cerca una soluzione particolare nella forma $y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$, dove $y_1(x)$ ed $y_2(x)$ sono le due soluzioni dell'omogenea associata.

Esempio: $y'' - 2y' - 3y = \sin x$