## ESERCITAZIONI di ANALISI MATEMATICA - A.A.2004/05 - UD3

**18/04/07 mercoledi (2 ore)**

Integrali generalizzati:
casi con funzioni continue illimitate in $(a,b)$ e funzioni continue in intervalli illimitati.
Esercizio: dire se sono finiti, ed eventualmente calcolare, i seguenti integrali:
$\displaystyle\int_0^1 \ln x \; dx \quad , \quad \int_1^2 \frac{dx}{\ln x} dx \quad , \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} dx.$
Carrellata sui limiti e sulle proprietà delle successioni numeriche in previsione delle serie numeriche.
Limiti fondamentali: $\lim_n a^n = +\infty,\ a>1 \quad , \quad \lim_n \frac{a^n}{n^q} = +\infty\ (a>1, q\in\mathbf{N}) \quad , \quad \lim_n \frac{a^n}{n!} = 0$ .
Limiti importante: $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$ e $\lim_n \sqrt[n]{p} = 1$
Ovviamente $\sqrt[n]{n^n} \to +\infty$ ; che cosa succederà per $\sqrt[n]{n!}$ ? Calcolo di $\lim_n \sqrt[n]{n!}$ usando la disug. $n! \geq (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}$.
Esercizio: $\lim_n \sqrt[n]{3^n+1} \quad , \quad \lim_n \sqrt[n]{\frac{n^3+7}{n+1}}$
Distribuzione del foglio di esercizi per casa Esercizi REPUBBLICA.

**02/05/07 mercoledi (2 ore)**

Teorema: $a_n > 0,\ \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \Rightarrow \lim_n \sqrt[n]{a_n} = L$
Serie a termini positivi (ripasso teoria): definizione, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} q^n$
Condizione necessaria (non suff.) per la convergenza: $\lim_n a_n = 0$ .
(utile per la dimostrazione della divergenza)
Criterio del rapporto. Criterio della radice. Criterio del confronto.
Esercizi:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2+1}{9n^2} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2+1}{9n^3} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2+1}{9n^4} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+1}{5^n+1} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{5^n} \quad ,$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n^2+n}-n) \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(3n+1)!} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-0.5} \quad .$$
Criterio del confronto asintotico. Esempio: studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$

Criterio integrale. Esempio: studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=100}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ .
Serie affrontate con gli sviluppi di Taylor. Esempi:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right] \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

Memento: lo stesso discorso vale anche per gli integrali generalizzati, ad esempio $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}\right]dx$.
Distribuzione del foglio di esercizi " A 22 "

**03/05/07 giovedi (2 ore)**

Esercizio: dimostrare che $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_N\frac{N}{N+1}=1$

Serie a segni alterni $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ , $a_n>0$: convergenza assoluta e convergenza semplice.

Criterio di Leibniz. Esempi: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n^2 2^n}{3^n}$ , $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ , $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

Serie di potenze: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)^2x^n$ , $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt[3]{n}}$ , $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(\ln n)^n}$

Esercizio: studiare la convergenza delle seguenti serie di potenze:

$\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sqrt[n]{e}}{n^3-1}x^n$ , $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n!}{(2n+1)!}x^n$ , $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n\ln n}{(n^2+1)^2}x^n$ , $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n^{5/7}}$ ,

$\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt[3]{n^2}+7}$ , $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(\ln n)\;x^n$ , $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2n}{n^4+7}(x-1)^n$ , $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n}{2^n}(x-3)^n$.

**09/05/07 mercoledi (2 ore)**

Funzioni di due variabili: continuità, derivabilità, differenziabilità, piano tangente (uso delle cordinate polari).
Esercizio: trovare il piano tangente alla calotta sferica nel punto $(0,0,1)$ e nel punto $(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ .
Esercizio: scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie $f(x,y)=\sin(xy)$ nel punto corrispondente a $(\frac{\pi}{3},-1)$ .
Studio della continuità delle seguenti funzioni:

$f_1(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & se\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & se\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ , $f_2(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & se\ \ x\neq 0\\ 0 & se\ \ x=0\end{cases}$ ,

$f_3(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2} & se\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & se\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ , $f_4(x,y)=\begin{cases}y\sin(\frac{1}{x}) & se\ \ x\neq 0\\ 0 & se\ \ x=0\end{cases}$

$f_5(x,y)=\begin{cases}\frac{xy-x+y}{x+y} & se\ \ x+y\neq 0\\ 0 & se\ \ x+y=0\end{cases}$ .

Oss: derivabilità non implica differenziabilità: esempio: $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$
Oss: derivabilità e continuità delle derivate parziali è condizione suff ma non necessaria.
Esempio: $f(x,y)=\begin{cases}x^2\sin(\frac{\pi}{x}) & se\ \ x\neq 0\\ 0 & se\ \ x=0\end{cases}$.
Distribuzione del foglio di esercizi " SEGOLENE "

**16/05/07 mercoledi (2 ore)**

Esercizio: Sia $f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ . È possibile definire $f(0,0)$ in modo che risulti continua?
Esercizio: determinare i punti dove è continua $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y+1}{1-x^2-y^2} & se \;\; x^2+y^2 \neq 1 \\ 0 & se \;\; x^2+y^2 = 1 \end{cases}$ .
Esercizio per casa: calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ .
Accenno allo studio di massimi e minimi di una funzione in $\mathbf{R}^2$ (hessiano, Weierstrass...) .
Esercizio: studiare la funzione $f(x,y) = \frac{x-2y}{x^2+y^2+1}$ (senza hessiano e con l'hessiano) .
Esercizio: studiare la funzione $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)$ (culo di bottiglia).
Esercizio: studiare la funzione $f(x,y) = 2x^2+4xy-y^2$ in $\mathbf{R^2}$.
Distribuzione del foglio di esercizi " VOLANDRI "

**23/05/07 mercoledi (2 ore)**

Esercizio: studiare la funzione $f(x,y) = x^2+xy+y^2$ in $B_1(0,0)$ chiusa. Studiarla poi ristretta al triangolo di vertici $(0,0)$ , $(0,1)$ , $(1,0)$.
Discorsetto sui moltiplicatori di Lagrange per la ricerca di minimi e massimi vincolati.
Esercizio: studiare la funzione di prima, $f(x,y) = x^2+xy+y^2$, ristretta alla circonferenza di raggio 1 con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange .
Esercizio: sia $f(x,y) = x^7+y^6+x+y^2+13y$. Si ha $f(0,0) = 0$. Verificare che l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = \phi(x)$ in un intorno del punto $x_0 = 0$. Si scriva la retta tangente a $\phi(x)$ in $x_0 = 0$.

**30/05/07 mercoledi (2 ore)**

Esercizio: studiare la funzione $f(x,y) = x^2+y^2-2x+4y = 5$ nella regione chiusa del piano limitata dalle funzioni $y = 1$ e $y = x^2-2x-2$.
Esercizio: studiare la funzione $f(x,y) = x^4+x^2y^2-x^2$ in $B_2(0,0)$ chiusa.
Esercizio: sia $f(x,y) = y^5+xy^2+x-1$. Si ha $f(1,0) = 0$. L'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $x = \psi(y)$ in un intorno del punto $y = 0$? L'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = \phi(x)$ in un intorno del punto $x = 1$?
Esercizio: trovare i punti critici della funzione $f(x,y) = \frac{2\sqrt{2}}{3}y^3 + \frac{5}{4}x^4 + \frac{6}{5}x^5 + x^2y^2$ e determinarne il carattere.

**31/05/07 giovedi (2 ore)**

Preparazione al compito: integrali impropri, serie e studio di una funzione di due variabili su un dominio chiuso e limitato.