ESERCIZI A 22

1) Studiare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-3)(4n-1)} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n-1}\ln(4n+1)}{n(n+1)} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \quad , \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3\left[\sqrt{2}+(-1)^n\right]^n}{3^n}$$

2) Calcolare la somma delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}\, dx$$

3) Stabilire la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^p}{n!} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 2^n}{3^n} \quad , \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln\ n)^n}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin\ n|}{\sqrt{n^3+7}} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\ ln\ n}{(n^2+1)^2} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^{2n}}$$

4) Esercizio molto impegnativo. Studiare, al variare rispettivamente di α e t, le seguenti serie:

$$i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^\alpha} \quad (\alpha > 0) \quad , \quad ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+t)^{nt}}{n!} \quad (t \geq 0)$$

5) Altro esercizio impegnativo. Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\right)$$

è convergente. Hint: ricordare che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.
Forse con un'idea diversa diventa meno impegnativo......?

6) Trovare gli intervalli di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n}{n+1}\right)^n x^n \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^{2n}} x^n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n)!}{(4n+1)!} x^n \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+3}{2n^3+5} (x-1)^n$$

7) Studiare, al variare di $p \in \mathbf{R}$, $p > 0$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=156}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^p}$$

8) Studiare la convergenza delle seguenti serie a termini di segno alterno :

$$\sum_{n=64}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n e^n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$$

RISPOSTE

1) div., conv., conv., conv., div., conv., conv., conv.

2) 1/2, 4/e 3) conv., conv., conv., conv., conv., conv., conv.

4) i) diverge per $\alpha \leq \frac{1}{2}$, converge altrimenti,

ii) diverge per $t \geq 1$, converge altrimenti

6) (-2,2) , (-1/2,1/2) , R , R , [0,2] 7) converge per $p > 1$

8) conv. sempl., conv. ass., conv. sempl.