ESERCIZI delle IENE

1) Dimostrare per induzione che, $\forall n \geq 1$

$$2(\sqrt{n+1}-1) \leq 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}-1$$

2) Dimostrare che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \cdot k = (n+1)! - 1.$

Hint: $k! \cdot k = (k+1)! - k!$. Verificare il risultato per induzione.

3) Dopo aver calcolato la somma dei primi due, tre, quattro, cinque numeri dispari, congetturare la formula che fornisce la somma dei primi n dispari e verificarla con il principio di induzione: fare altrettanto per la somma dei primi n numeri pari e controllare che $\displaystyle\sum_{h=1}^{n}(2h)+\sum_{h=1}^{n}(2h-1)$ dà il giusto risultato.

4) Scrivere l'identità $(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$ per $x = 0, 1, \ldots, n$ e sommare membro a membro le $n+1$ identità risultanti ottenendo

$$(n+1)^3 = 3\sum_{h=1}^{n} h^2 + 3\sum_{h=1}^{n} h + (n+1)\ .$$

Dedurne che $\displaystyle\sum_{h=1}^{n} h^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\forall n \in \mathbf{N}$ e verificare la formula per induzione.

5) Dimostrare per induzione che, $\forall n \geq 2$

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}$$

6) Dimostrare per induzione che, $\forall n \geq 3\ ,\ b \in \mathbf{R}\ ,\ b \geq 2$, si ha $b^n > nb$.

7) Calcolare $S = \displaystyle\sum_{h=1}^{n} \frac{1}{h(h+1)}$.

Verificare per induzione che $S = \frac{n}{n+1}\quad \forall n \in \mathbf{N}$

8) Dimostrare che $(a+b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n)\quad \forall a, b \in \mathbf{R}\ ,\ a, b > 0$.