ESERCIZI del KGB

1) Calcolare l'area dell'insieme dei punti del cerchio di centro l'origine e raggio 2 , posti nel semipiano $x \geq 1$.

2) Problema: vedere se è possibile trovare una funzione $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ continua, con $f(1) = 1$, $f \geq 0$, tale che

$$i) \int_0^1 f(x)\ dx = 0 \quad , \quad ii) \int_0^1 f(x)\ dx < 10^{-20} \quad (oppure =)$$

3) Dimostrare che nel Teorema del valor medio integrale l'ipotesi di continuità è necessaria.

4) Sia f continua in $[0,1]$, sia $x \in [0,1]$. Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{3x}$.

5) Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \arctan\left(\sqrt{x-1}\right)\ dx \quad , \quad \int x\,(\arctan x)^2\ dx \quad , \quad \int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}\ dx$$

6) Trovare una primitiva delle seguenti funzioni:

$$x^2 \sin x \cos x \quad , \quad \frac{1}{\cos^4 x} \quad , \quad \frac{\lg x}{x^3} \quad , \quad \cos x \lg\left(\sqrt{\sin x}\right) \quad , \quad \lg^2(5x) \quad , \quad \frac{1}{x(\lg x)^{\frac{2}{3}}}$$

7) Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_0^1 x^2 \arctan x\ dx \quad , \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\ dx \quad , \quad \int_0^1 (x-1)\lg(x^2+1)\ dx$$

8) Trovare:

$$\int \frac{3x+2}{x^2+x+1}\,dx \quad , \quad \int \frac{dx}{x^2-1} \quad , \quad \int \frac{dx}{x^2-x-2}$$

$$\int \frac{x^2+3}{(x-1)(x^2+1)}\,dx \quad (\text{ arrivare ad integrare } \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1})$$

$$\int \frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}\,dx \quad (\text{ arrivare ad integrare } \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-2})$$

9) Esercizi vari:

$$\int x\arctan^2 x\,dx \quad , \quad \int \frac{1+x}{x^2+1}\,dx \quad , \quad \int \frac{4x+1}{2x^2+x+5}\,dx \quad , \quad \int \cos(\log x)\,dx$$

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+10} \quad , \quad \int \frac{x\ dx}{\sqrt{x^2+3x+1}} \quad (\text{porre } \sqrt{x^2+3x+1}=x+t)$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} \quad , \quad \int \ln\sqrt{x}\,dx \quad , \quad \int \sqrt[3]{5x+1}\,dx \quad (\text{porre } \sqrt[3]{5x+1}=t)$$

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx \ , \ \int \sqrt{1+4x^2}\,dx \ , \ \int \cos x\ \log^2(\sin x)\,dx \ , \ \int \cos(x^2)\,dx$$

$$\int \frac{7x+1}{x^2-x-6}\,dx \quad , \quad \int 3xe^{x^2}dx \quad , \quad \int \sqrt{2x-1}\,dx \quad , \quad \int 3xe^{x^2}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{4+3x^2} \quad , \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} \quad , \quad \int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx \quad (\text{hint: porre } t=\sqrt{\tfrac{1-x}{1+x}})$$

10) Trovare, per $b \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{(x^2+b^2)^n}$ (hint: porre $z = x^2+b^2$)

11) Dimostrare che $\int \cos^n x \, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$

(hint: la formula suggerisce l'integrazione per parti)

12) Formula utile: posto $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, si ha

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)} \left[(2n-3) I_{n-1} + \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} \right]$$

13) Esercizio : calcolare $\int_0^1 e^{-x^2} \, dx$ con un errore minore di un centesimo (usare il resto di Lagrange)

14) Mediante una semplice integrazione, osservando che

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} \quad , \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad ,$$

ritrovare gli sviluppi di $\ln(1+x)$ e $\arctan x$.

alcune RISPOSTE

2) no, si', si' 4) $\frac{f(0)}{3}$

5) $x \arctan\left(\sqrt{x-1}\right) - \sqrt{x-1} + c$,

$\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right) \arctan^2 x - x \arctan x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c$, $\ln\left|\frac{x}{1+x}\right| + c$

6) $\frac{1}{2}(x \sin x)^2 + \frac{x}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{8} \cos(2x) + \frac{x^2}{4} + c$,

$\frac{\tan x}{\cos^2 x} - \frac{2}{3} \tan^3 x$, $-\frac{1}{2x^2}\left(\frac{1}{2} + \ln x\right)$,

$\sin x[\ln(\sqrt{\sin x}) - \frac{1}{2}]$, $x \ln^2(5x) - 2x \ln(5x) + 2x$, $3(\ln x)^{\frac{1}{3}}$

7) $\frac{\pi}{12} - \frac{1}{6}(1 - \ln 2)$, 1 , $\frac{1}{2}(\pi - 3)$

8) – , $\ln\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}$, $\ln\sqrt[3]{\left|\frac{x-2}{x+1}\right|}$, – , –

13) $\frac{2}{3}$