

ESERCIZI della REPUBBLICA

1) I seguenti passaggi

$$\int_{-3}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-3}^1 = -1 - \frac{1}{-3} = -\frac{4}{3}$$

contengono un errore. Si noti che l'integrando è positivo ed invece il risultato è negativo. Individuare l'errore e dire se l'integrale dato è convergente.

2) Calcolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx, \quad \int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^2}, \quad \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}, \quad \int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} \quad (\text{achtung}),$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x}, \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\cos^3 x \cdot e^{\tan x}}, \quad \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}$$

3) Dire se converge o meno (usando maggiorazioni) il seguente integrale (ed eventualmente calcolarlo): $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-|x|} dx$.

4) Dire se convergono, ed eventualmente calcolare, i seguenti integrali:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^3} dx, \quad \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}}$$

5) Stabilire, mediante confronto, se i seguenti integrali sono o non sono convergenti:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\arctan x}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^3)^3}}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4(1+x^4)} \quad , \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3} dx$$

6) Verificare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi \quad , \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \frac{1}{\ln 2} \quad , \quad \int_0^{+\infty} x e^{-\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{2}{e}$$

7) Calcolare, se esistono, $\lim_n a_n$, $\lim_n b_n$, $\lim_n c_n$, dove

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ pari} \\ 1 - \frac{1}{n} & n \text{ dispari} \end{cases} \quad , \quad b_n = \frac{\ln n + 5n}{3n + 1} \quad , \quad c_n = \sqrt[n]{9^n + 8n^3 + 6n}$$

8) Calcolare $\lim_n \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, $a, b > 0$

9) Calcolare

$$\lim_n \frac{n \sin n}{n^2 + 1} \quad , \quad \lim_n \frac{5^n}{n!} \quad , \quad \lim_n \frac{5^n}{n^7}$$

RISPOSTE

2) $1, +\infty, 2, 9, \frac{1}{\ln 2}, -\infty, 1, \frac{8}{3}, \frac{\pi}{2}$ 3) 4 4) *diverge*, $\ln(7 + 2\sqrt{12})$

5) *converge* ($\sqrt{\pi}$), *converge*, *converge*, *diverge*

7) $\exists, \frac{5}{3}, 9$ 8) $1 (a > b), -1 (a > b), 0 (a = b)$ 9) $0, 0, +\infty$