ESERCIZI “ RUMSFIELD ”

1) Dimostrare che per, $x \to +\infty$

$$\sqrt{1+x^2} \sim 2\frac{\cos\frac{2}{x}}{\sin\frac{2}{x}} \qquad , \qquad 3e^x + 3x^3 \sim 3e^x - 5x^{10} + \ln x$$

2) Dimostrare che $\ln(\sin \frac{\pi}{2} x)$ è un $o(x-1)$

3) Calcolare $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^x} - e}{x}$

4) Problema: $\exists no\ a, b \in \mathbf{R}$ tali che $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - (ax+b)}{x} = L = 0$?

5) Problema: $\exists no\ a, b \in \mathbf{R}$ tali che $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\frac{x}{\ln x} - (ax+b)}{x-e} = L = 0$?

6) Trovare un polinomio $P(x)$ di grado al più 10 tale che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1-x^3} - P(x)}{x^{10}} = 0$$

7) Trovare un polinomio $P(x)$ di grado al più 3 tale che

$$\lim_{x\to 0} \frac{P(x) - \sin x}{x^3} = 0$$

8) Sia $f(x) = \frac{2-x^2}{(1+x)^2}$. Trovare un polinomio $P(x)$ di grado al più 2 tale che $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - P(x)}{x^2} = 0$

9) Calcolare i seguenti limiti con l'uso della formula di Taylor:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x^2}}{1-\sqrt{1-x}} \qquad , \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x \cdot \sin 5x}{(x-x^3)^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{e^{3x}-1-3x} \qquad , \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0} \left[\ln\left(1-\frac{5}{2}x^2\right)+\cos x\right]^{\frac{1}{x^2}} \qquad , \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{2\ln(1+x)}-\frac{1}{\sin x}\right] \qquad , \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2-\arctan(x^2)}{x^6}$$

10) Sia $f:(a,b)\to \mathbf{R}$ due volte derivabile in un intorno di $x_0 \in (a,b)$:

i) dimostrare che $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0)$

ii) mostrare con un esempio che tale limite può esistere senza che esista $f''(x_0)$

11*) Ricordo che, se $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sono numeri positivi, la loro media aritmetica è maggiore o uguale alla loro media geometrica. Formalmente:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n} \ .$$

Dimostrare (usando il Teorema di de L'Hospital) che

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}$$

12*) Dimostrare che $\log(\cos x) = -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)$ in un intorno di $x=0$. Hint: ricordare lo sviluppo di $\log(1+y)$, osservare che lo sviluppo del coseno è $1-\frac{x^2}{2}+\ldots$, quindi $\log(\cos x) = \log(1+\cos x-1) = \ldots$

RISPOSTE

3) $-\infty$ 4) $a=1, b=1$ 5) $a=0, b=e$ 6) $P(x)=1+x^3+x^6+x^9$
7) $P(x)=x-\frac{x^3}{6}$ 8) $P(x)=5x^2-4x+2$ 9) 1 , 15 , $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{6}$, e^{-3} , 0 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$