ESERCIZI “ SADDAM ”

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}}{x} \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{e^{3x}-1-3x} \quad , \quad \lim_{x\to 0^+}(\tan x)^{\sin x}$$

2) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(2x+1)}{\log x} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+\sqrt{x})}{\log x} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+x^2)}{\log x}$$

3) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+x^5)}{\log(2+x^3)} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log[x(x+1)(x+2)(x+3)]}{\log x} \quad , \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{\log(\sin x)}$$

4) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\log(\sin x)}{\cos x} \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{\sin^2 x} \quad , \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^x}{1-\cos\sqrt{x}} \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\log\sqrt{1+x^2}}{1-\cos x}$$

5) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\log x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \quad , \quad \lim_{x\to 0^+}\arcsin x\cdot\ln x \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2+x} \quad , \quad \lim_{x\to 0^+}(\arctan x)^x$$

6) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+}x\cdot\ln(\sin x) \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-x^2}{x^4} \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{e^{x-1}} \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

7) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{\sin^2 x} \quad , \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) \quad , \quad \lim_{x\to 0^+}[\log(1+x)]^x$$

8) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3x-\sin x}{2x+\cos x} \quad , \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{2^x-4\cdot 2^{-x}}{(x-1)^2} \quad , \quad \lim_{x\to 0^+}\tan x\cdot \ln^2 x$$

9) Sia $f(x)=\frac{1}{x^2}$. Verificare che $f'(x)$ non si annulla per alcun valore reale di x. Perche non vale la tesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-1,1]$, nonostante che $f(-1)=f(1)$?

10) Trovare esplicitamente il valore intermedio x_0 del teorema di Lagrange, relativo alla funzione $f(x)=x^3-3x^2$, nell'intervallo $[0,1]$.

11) Supponiamo che $f(x)$ sia una funzione derivabile tre volte in un intervallo $[a,b]$. Dimostrare che, se risulta $f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0$, allora esiste $x_0\in(a,b)$ tale che $f'''(x_0)=0$

12) Problema: $\exists no\ a,b\in\mathbf{R}$ tali che $\lim_{x\to 1}\dfrac{\log x-(ax+b)}{x-1}=L=0$?

13) Sia $f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)$. Dimostrare che l'equazione $f'(x)=0$ ha almeno tre radici reali (hint: usare Lagrange). In generale, sia $f(x)$ derivabile per ogni $x\in\mathbf{R}$. Dimostrare che se l'equazione $f(x)=0$ ha n soluzioni reali, allora l'equazione $f'(x)=0$ ha almeno n-1 soluzioni reali.

14)* Sia $f:[a,+\infty)\to\mathbf{R}$ continua e derivabile e tale che $\lim_{x\to+\infty}f(x)=f(a)$. Dimostrare che esiste $\xi>a$ tale che $f'(\xi)=0$

RISPOSTE

$1)0,+\infty,\frac{4}{9},1$ $\quad 2)1,\frac{1}{2},2$ $\quad 3)\frac{5}{3},4,1$ $\quad 4)0,-\frac{1}{2},-2,1$ $\quad 5)1,0,0,1$
$6)0,\frac{1}{2},1,\frac{1}{6}$ $\quad 7)-\frac{1}{2},0,1$ $\quad 8)+\infty,+\infty,0$ $\quad 10)1-\frac{1}{\sqrt{3}}$