ESERCIZI “ TELECOM ”

1) Trovare estremo inferiore e superiore dei seguenti insiemi:
$A = \left\{ \frac{n^2-1}{n^2+1} \ , \ n \in \mathbf{N} \ , \ n \geq 1 \right\} \quad , \quad B = \left\{ e^{\frac{1}{n}} \ , \ n \in \mathbf{N} \ , \ n \geq 1 \right\}$

2) Trovare estremo inferiore e superiore dei seguenti insiemi:
$A = \left\{ \frac{x+1}{2x+1} \ , \ x \in \mathbf{R} \ , \ x \geq 0 \right\} \quad , \quad B = \left\{ \sqrt{x^2+1} - x \ , \ x \in \mathbf{R} \right\}$

3) Sia $E \subset \mathbf{R}$, $E \neq \emptyset$. Poniamo $-E = \{-x \ ; \ x \in E\}$. Dimostrare che $\inf E = -\sup(-E)$. Inoltre, se $E \subset \mathbf{R}^+$, posto $\frac{1}{E} = \left\{ \frac{1}{x} \ ; \ x \in E \right\}$, dimostrare che $\sup(\frac{1}{E}) = \frac{1}{\inf E}$

4)* Siano $A, B \subset \mathbf{R}$ non vuoti. Poniamo

$A + B = \{a + b \ ; \ a \in A \ , \ b \in B\}$,
$AB = \{ab \ ; \ a \in A \ , \ b \in B\} \, (A \subset \mathbf{R}^+ \ , \ b \subset \mathbf{R}^+)$,
$\gamma A = \{\gamma a \ ; \ a \in A\}$, $\gamma \geq 0$.

Allora si ha $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, $\sup(AB) = \sup A \sup B$, $\sup(\gamma A) = \gamma \sup A$. E se $\gamma < 0$?

5) Trovare estremo superiore ed inferiore dei seguenti insiemi

$$A = \left\{ n \in \mathbf{N} \ , \ n \geq 1 : \ \frac{n^2+24}{n+1} \right\} \qquad B = \left\{ n \in \mathbf{N} \ , \ n \geq 1 : \ \frac{n+1}{n^2+35} \right\}$$

$$C = \{ n \in \mathbf{N} \ , \ n \geq 1 : \ 2n^3 \geq 3n^2 + 3n + 1 \}$$

$$D = \left\{ n \in \mathbf{N} \ , \ n \geq 1 : \ n^2 + \frac{60}{n} \right\} \qquad F = \left\{ n \in \mathbf{N} \ , \ n \geq 1 : \ n + \frac{30}{n} \right\}$$

6) Trovare estremo superiore ed inferiore dell'insieme

$$A = \Big\{ x \in \mathbf{R} \ : \ 4x + x^3 \leq -2x^2 - 3 \Big\}$$

7) Trovare estremo superiore ed inferiore dei seguenti insiemi

$$A = \left\{ \frac{x^2+10}{x^2+1} \ : \ x \in \mathbf{R} \right\} \qquad\qquad B = \left\{ \frac{x^2+3}{x^2+9} \ : \ x \in \mathbf{R} \right\}$$

8) Trovare estremo superiore ed inferiore dell' insieme

$$A = \left\{ \frac{2x-1}{x+3} \ : \ x \in \mathbf{R} \ , \ x \geq 1 \right\}$$

RISPOSTE

1) s=1 , i=m=0 ; s=M=e , i=1
2) s=M=1 , i=$\frac{1}{2}$; s=$+\infty$, i=0
5) s=$+\infty$, i=m=8 ; s=M=$\frac{1}{10}$, i=0 ; s=$+\infty$, i=m=17 ;
s=$+\infty$, i=m=29 ; s=$+\infty$, i=m=11
6) s=M=-1 , i=$-\infty$
7) s=M=10 , i=1 ; s=1 , i=m=$\frac{1}{3}$
8) s=2 , i=m=$\frac{3}{4}$