Diario delle Esercitazioni di Analisi Matematica - UD4 - A.A. 07/08

19 settembre 2007, 2 ore

Definizione di norma in uno spazio vettoriale, distanza indotta da una norma (tra due punti, tra punto e insieme e tra insiemi), diametro di un insieme. Definizione in $\mathcal{R}^n$ di norma L_p (con p=2 norma euclidea) e norma L_∞. Definizione di norme equivalenti. Dimostrazione che la norma L_1 e la norma euclidea sono equivalenti alla norma L_∞.
Oss: tutte le norme in $\mathcal{R}^n$ sono equivalenti.
Oss: ci sono distanze che non provengono da una norma (ad esempio la distanza discreta o la distanza definita da $d(x,y) = |\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}|$).
Definizione di sfera aperta e sfera chiusa: rappresentazione delle sfere a seconda della norma scelta.
Definizione di insieme aperto, chiuso, di punto interno, di interno di un insieme ($intE$ oppure $\dot{E}$), di esterno di un insieme ($extE$ o $estE$).
Oss: E aperto $\Longleftrightarrow$ $E = \dot{E}$.
Esercizio: dimostrare che le sfere aperte sono insiemi aperti.
Proprietà degli aperti, proprietà dei chiusi.
Oss: l'intersezione arbitraria di aperti non è detto che sia aperta, ad esempio $\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_{\frac{1}{n}}(0,0) = \{(0,0)\}$; l'unione arbitraria di chiusi non è detto che sia chiusa, ad esempio $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \overline{B}_{1-\frac{1}{n}}(0,0) = B_1(0,0)$.
Definizione di intorno e di punto di accumulazione.
Oss: un punto di accumulazione di un insieme puo' appartenere come non appartenere all'insieme.
Definizione di insieme derivato (E'). Osserviamo che tra E e il suo derivato E' non esiste nessuna inclusione valida in generale.

26 settembre 2007, 2 ore

Esercizio: F chiuso $\Longleftrightarrow F \supset F'$.
Definizione di chiusura di un insieme E ($\overline{E}$) e di punto isolato.
Oss: E chiuso $\Longleftrightarrow \overline{E} = E$; inoltre $A, B \in \mathcal{R}^n \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
Oss: $\overline{E} = E \cup E'$.
Esercizio: ogni insieme costituito da punti isolati deve essere necessariamente chiuso? ($E = \left\{\frac{1}{n} \ , \ n \in \mathcal{N} \ , \ n \geq 1\right\}$).
Esercizio: trovare un insieme con 17 punti di accumulazione.
Esercizio: sia $E = \left\{(x,y) \in \mathcal{R}^2 : \ y = \sin\frac{1}{x} \ , \ 0 < x \leq 1\right\} \subset \mathcal{R}^2$. Trovare $\overline{E}$.
Esercizio: mostrare che in generale $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$, mentre vale $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (ma non vale per unioni arbitrarie).
Definizione di frontiera di un insieme E (∂E). La frontiera di un insieme è sempre un insieme chiuso.

Oss: si verifica facilmente che $\mathcal{R}^n = \dot{E} \cup \partial E \cup extE \quad \forall\ E \subset \mathcal{R}^n$.
Oss: ci sono insiemi che non hanno interno ($[a,b] \subset \mathcal{R}^2$) e quindi insiemi che non hanno punti esterni. L'insieme puo' essere sparpagliato e quindi avere una frontiera spessa (i razionali di $\mathcal{R}^2$ hanno la frontiera che è tutto $\mathcal{R}^2$), cioè ∂E puo' contenere E (anche $E = \left\{\frac{1}{n}\ ,\ n \in \mathcal{N}\ ,\ n \geq 1\right\}$ ha $\partial E = E \cup \{0\}$).
Distribuzione del foglio di esercizi per casa: Esercizi ..direction home.

27 settembre 2007, 2 ore

Esercizio: in $\mathcal{R}^2$ si prenda la distanza euclidea; dire se è vero o falso che $diamE = d \Longrightarrow \exists x \in \mathcal{R}^2\ :\ E \subset \overline{B}_{\frac{d}{2}}(x)$.
Esercizio: vediamo con un esempio di come non sia possibile testare l'apertura di un insieme E di $\mathcal{R}^2$ limitandosi a testare l'apertura in $\mathcal{R}$ delle intersezioni di E con qualunque retta.
($A = \left\{(x,y) \in \mathcal{R}^2 :\ x \in \mathcal{R}\ ,\ y > 0\ ,\ y > 2x^2\ ,\ y < x^2\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathcal{R}^2 :\ x \in \mathcal{R}\ ,\ y \leq 0\right\}$)
Definizione di derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(P_0)$.
Esempio: calcolare $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(P_0)$, dove $f(x,y) = x^2 + y^2$, $P_0 = (1,2)$, α è rispettivamente $(0,1)$, $(1,0)$, $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Calcolare tale derivata anche nella direzione della retta $y = \frac{1}{2}x$.
Oss: se le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono continue si ha $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(P_0) = Df(P_0) \circ \alpha$.
(In realtà è suff. la differenziabilità della funzione)
Esercizio: sia $f(x,y) = \ln(e^x + e^y)$. Calcolare la derivata di f nella direzione che forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con l'asse delle x.
Esercizio: dimostrare che la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$
è continua e derivabile in $(0,0)$ in qualunque direzione, ma non è differenziabile in $(0,0)$.
Oss: avevamo visto che l'esistenza delle derivate parziali non implica neppure la continuità; osserviamo adesso che neanche l'esistenza di tutte le derivate direzionali implica la continuità.
Ad esempio $f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) :\ y \geq x^2\ ,\ y \leq 0 \\ 1 & (x,y) :\ 0 < y < x^2 \end{cases}$ oppure $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.
Entrambe le funzioni sono derivabili in $(0,0)$ in qualunque direzione, ma non sono continue in $(0,0)$.

1 ottobre 2007, 3 ore

Funzioni $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ e definizione di matrice jacobiana per tali funzioni .
Esercizio: calcolare matrice jacobiana di $f(x,y,z) = (2x + e^y, x + y \sin z)$ nel punto $(1,1,\pi)$, di $g(x,y) = (\cos(x+y), y, y^x)$ e di $h(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$.
Trasformazioni nel piano e nello spazio: coordinate polari, cilindriche e sferiche, commenti e calcolo della loro matrice jacobiana.
Definizione di superficie, curve, varietà regolari: casi $n = 1,2$ ed $m = 1,2,3$.
Commenti vari. Definizione di piano tangente e di versore normale ad una superficie: collegamento con le superficie cartesiane.
Regola della derivata di una composta nel caso più generale possibile.

Esercizio: sia $h(x, y, z) = f(g(x, y, z))$, dove $g(x, y, z) = (\sin 2x + yz, 3z + \tan y, xyz)$, $f(u, v, w) = u^2 + v^3 - 3w$. Calcolare $Dh(x, y, z)$.
Esercizio: sia $h(t) = f(g(t))$, dove $g(t) = (t\cos t, t\sin t)$, $f(x, y) = e^{xy^2}$. Calcolare $h'(\frac{\pi}{2})$.
Esercizio: data $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$, $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, definisco $\Delta f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_k}$ e lo chiamo Laplaciano di f. Nel caso particolare di $\mathcal{R}^2$, in cordinate polari si ha che $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}$ (accenno di dimostrazione).
Esercizio (per casa): sia $f \in \mathcal{R}^3$. Se considero le coordinate cilindriche $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$, ho che $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}$

Esercizio (per casa): sia $f \in \mathcal{R}^3$. Se considero le coordinate sferiche $\begin{cases} x = r\sin\phi\cos\theta \\ y = r\sin\phi\sin\theta \\ z = \cos\phi \end{cases}$, ho che $\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial f}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2 f}{\partial^2\theta}$.
Distribuzione del foglio di esercizi per casa: Esercizi Cilindric il germano.

3 ottobre 2007, 2 ore

Discorsetto riassuntivo sulle sottovarita' differenziabili.
Teorema delle funzioni implicite in due variabili e nel caso più generale possibile.
Esercizio: Calcolare le derivate prime e seconde della funzione $y = g(x)$ definita implicitamente dall'equazione $xy^2 + 4x^2y - 5 = 0$, nel punto $(1, 1)$ (verifica esplicitando la y) .
Esercizio: Calcolare la matrice delle derivate della funzione $z = g(x, y)$ definita implicitamente dall'equazione $z - (x^2 + y^2)\cos(xz) - 1 = 0$, nel punto $(\frac{\pi}{2}, 0, 1)$.
Esercizio: Calcolare la matrice delle derivate della funzione $(z, t) = g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$ definita implicitamente dall'equazione $f(x, y, z, t) = 0$ ($f(x, y, z, t) = (te^x + z^2 + y - 4, z - t)$) , nel punto $(\ln 2, 1, 1, 1)$ (verifica esplicitando la z e la t).

8 ottobre 2005, 1 ora

Esercizi di verifica sui primi argomenti trattati (topologia, derivate direzionali, calcolo e rango di matrici jacobiane)

10 ottobre 2005, 2 ore

Commenti sugli esercizi di verifica dell'otto ottobre.
Esercizio: osservare che nell'intorno dei punti singolari $(0, 0)$ e $(1, 1)$ l'equazione $f(x, y) = 0$ ($f(x, y) = (x-y)(y-x^2)$) non definisce implicitamente ne' $y = g(x)$, nè $x = h(y)$.
Esercizio: Calcolare la matrice delle derivate della funzione $(y, z) = g(x) = (g_1(x), g_2(x))$ definita implicitamente dall'equazione $f(x, y, z) = 0$ ($f(x, y, z) = (x + xy + z, 2z - y - x)$) , nel punto $(0, 0, 0)$.

Lunghezza di una curva. Lunghezza di una curva cartesiana e lunghezza di una curva in coordinate polari nel caso piu' generale possibile.
Definizione di integrale di una funzione lungo una curva $\int_\gamma f\ ds$.
Esercizio: calcolare la lunghezza della curva $\gamma(t) = (t, \frac{1}{2}\ln(1-t^2))$, $t \in [0, \frac{1}{2}]$.
Esercizio: calcolare la lunghezza del bordo superiore della palla di raggio 2 centrata nell'origine vista come curva cartesiana e poi come curva espressa in coordinate polari.
Distribuzione del foglio di esercizi per casa: Esercizi ..riedifico' l'edificio dell'analisi....

17 ottobre 2007, 2 ore FORSE

Oss: $\gamma(t)$ derivabile non significa traiettoria dolce (esempio $\gamma(t) = (t^3, t^2)$).
Esercizio: calcolare $\int_\gamma y\ ds$, dove γ è la curva cartesiana di equazione $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, 6]$.
Esercizio: calcolare $\int_\gamma \frac{ds}{x^2 + y^2 + z^2}$, dove $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
Definizione di baricentro e momento d'inerzia.
Esercizio: calcolare il baricentro dell'elica $\gamma(t) = (r\cos\omega t, \sin\omega t, kt)$, $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$.
Esercizio: calcolare il momento d'inerzia della curva $\gamma(t) = (1-t, t, 2t)$, $t \in [0, 1]$ rispetto al punto $(0, 0, 0)$.
Definizione di lavoro. Esempio: calcolare il lavoro svolto dalla forza $F(x, y, z) = (x, xy, 1)$ lungo la curva $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0, 1]$.
Dopo aver ricordato la definizione di integrale di una funzione lungo una curva $\int_\gamma f\ ds$ si introduce $\int_\gamma f\ dx_i$ e $\int_\gamma F\ dx = \sum_{k=1}^{n} \int_\gamma f_k\ dx_k$, dove $F = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$, $dx = (dx_1, dx_2, \cdots, dx_n)$.
Distribuzione del foglio di esercizi per casa: Esercizi