Diario delle Esercitazioni di Analisi Matematica

UD5 - A.A. 07/08

7 novembre 2007, mercoledi, due ore

Integrali multipli, caso $\mathcal{R}^2$. I due strumenti fondamentali per il calcolo di integrali doppi sono il teorema di Fubini e la formula di cambiamento di variabili (sopattutto il caso speciale del passaggio a coordinate polari).
Esercizio: calcolare $\displaystyle\int\int_{[a,b]\times[c,d]} k\ dxdy$.
Esercizio: calcolare $\displaystyle\int\int_D (xy^2+1)\ dxdy$,
dove $D = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 : -1 \le x \le 1\ ,\ 0 \le y \le 2\}$ (due ordini d'integrazione).
Esercizio: calcolare $\displaystyle\int\int_D (x^2+y^2)\ dxdy$,
dove $D = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 : 1 \le x \le 2\ ,\ 1 \le y \le x^2\}$.
Commenti su come fare l'iterazione nell'ordine migliore a seconda del dominio d'integrazione e della funzione integranda.
Esercizio: calcolare $\displaystyle\int\int_D e^{y^3}\ dxdy$,
dove $D = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 : 0 \le x \le 1\ ,\ \sqrt{x} \le y \le 1\}$.
Esercizio: calcolare $\displaystyle\int\int_D \frac{x^2+y^2}{x+y}\ dxdy$, dove D è il triangolo di vertici $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.
Cambio di variabili negli integrali in $\mathcal{R}^2$. Caso speciale: da coordinate cartesiane a coordinate polari.
Esercizio: passando a coordinate polari, calcolare $\displaystyle\int\int_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\ dxdy$, dove D è il primo quadrante del cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $R > 0$.

14 novembre 2007, mercoledi, due ore

Esercizio: calcolare $\displaystyle\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}\ dxdy$, dove D è la regione interna alla circonferenza $x^2+y^2 = 2x$ (usare coordinate polari).
Definizione di baricentro di un insieme. Esempio: calcolare il baricentro dell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 : y \ge 0x\ ,\ \ge 0\ ,\ \sqrt{x}+\sqrt{y} \le 2\}$.
Oss: si osservi che, prendendo $f(x,y) = 1$, l'integrale di f in $\mathcal{R}^2$ su di un dominio D dà l'area di D e, prendendo $f(x,y,z) = 1$, l'integrale di f in $\mathcal{R}^3$ su di un dominio A dà il volume di A.
Esercizio: calcolare l'area della regione D racchiusa dalla curva data dall'unione della curva di equazione $r = a\theta$, $a > 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e del segmento congiungente i punti $(0,0)$ e $(2\pi a, 0)$.
Cambio di variabili negli integrali in $\mathcal{R}^n$. Casi speciali in $\mathcal{R}^3$: da coordinate cartesiane a coordinate cilindriche e da coordinate cartesiane a coordinate sferiche.

Esempi:

1) calcolare $\int\int\int_D (x^2+y^2-z)\ dxdydz,$

dove D è il cilindro retto di base $B_1(0,0)$ ed altezza 2

2) calcolare il volume di un cono gelato.

Esercizio: calcolare $\int\int_D (x-y)^2\sin^2(x+y)\ dxdy$, dove dove D è il quadrato di vertici $(\pi,0)$, $(\pi,2\pi)$, $(0,\pi)$, $(2\pi,\pi)$.

Esercizio: calcolare $\int\int\int_D (x^2+y^2)\ dxdydz,$

dove $D=\{(x,y,z)\in\mathcal{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le 4\}$.

Esercizio: calcolare $\int\int_D (x^2+y^2)\ dxdydz$, dove D è il cono circolare di raggio a ed altezza b centrato sull'asse z.

Distribuzione del foglio di eserzi per casa: Esercizi doppi.

21 novembre 2007, mercoledi, due ore

Esercizio: calcolare $\int\int_D\ dxdy$,

dove $D=\{(x,y)\in\mathcal{R}^2:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\ ,\ y\ge -x+b\}$.

Esercizio: calcolare $\int\int_D e^{b^2x^2+a^2y^2}\ dxdy$,

dove $D=\{(x,y)\in\mathcal{R}^2:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$.

Integrali impropri: in analogia con gli integrali $\int_0^1\frac{1}{x^p}\ dx$, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\ dx$, in una variabile, vedere se convergono o meno gli integrali in due variabili

$\int\int_{B_1(0,0)}\frac{1}{|(x,y)|^p}\ dxdy$, $\int\int_{\mathcal{R}^2-B_1(0,0)}\frac{1}{|(x,y)|^p}\ dxdy$.

Esercizio: usando un'integrazione in $\mathcal{R}^2$ calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\ dt$

Lo spazio $L^\infty(A)$, $A\subset\mathcal{R}$.

Successioni di funzioni: convergenza puntuale e convergenza uniforme.

Oss 1: convergenza uniforme implica convergenza semplice, ma non viceversa (esempio: $f_n(x)=x^n$, $x\in(0,1)$) .

Oss 2: limite puntuale di funzioni continue non è detto che sia continuo; limite puntuale di funzioni derivabili non è detto che sia derivabile; limite puntuale di funzioni integrabili non è detto che sia integrabile.

Esempi: $f_n(x)=x^n$, $x\in[0,1]$; $f_n(x)=\begin{cases}0 & |x|>\frac{1}{n}\\ 1-n|x| & |x|<\frac{1}{n}\end{cases}$; f_n funzione caratteristica dei primi n razionali dell'intervallo $[0,1]$.

28 novembre 2007, mercoledi, due ore

Seconda verifica su integrali doppi e tripli.

Teorema: limite uniforme di funzioni continue è continuo.

Esercizio: siano $f_n : A \to \mathcal{R}$, $||f_n||_\infty \leq M \ \ \forall\, n \in \mathcal{N}$. È vero che $\frac{f_n}{n}$ converge a 0 uniformemente? Vale il viceversa?
Convergenza uniforme e derivazione: siano $f_n : [a,b] \to \mathcal{R}$ continue insieme alle loro derivate. Allora se f_n converge ad f puntualmente ed f_n' converge a g uniformemente si ha che f è continua insieme alla sua derivata ed $f'(x) = g(x)$.
Oss: dalle ipotesi del teorema prececente si ha che $f_n \to f$ anche uniformemente in $[a,b]$.
Convergenza uniforme ed integrazione: siano $f_n : [a,b] \to \mathcal{R}$ continue. Allora se f_n converge ad f uniformemente si ha

$$\lim_n \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_n f_n(x)dx$$

(il teorema non è vero in generale se il dominio non ha misura finita : esempio).

5 dicembre 2007, mercoledi, due ore

Esercizio: studiare la convergenza della successione $f_n(x) = n^p x e^{-nx}$, $x \in [0,1]$.
Esercizio: confrontare l'integrale del limite con il limite dell'integrale della successione $f_n(x) = n^p x e^{-nx}$, $x \in [0,1]$ precedentemente studiata.
Serie di funzioni: convergenza puntuale e convergenza uniforme.
Oss: somma di una serie puntualmente convergente di funzioni continue non è detto che sia continua. Esempio con una serie di funzioni che converge puntualmente alla funzione di Heaviside.
Teorema: somma di una serie uniformemente convergente di funzioni continue è continua.
Oss: condizione necessaria (ma non suff.) affinchè una serie di funzioni f_n converga uniformemente su A è che f_n converga uniformemente a 0.
Criterio di convergenza uniforme (test di Weierstrass): siano $f_n : A \to \mathcal{R}$ tali che $|f_n(x)| \leq M_n \ \ \forall\, x \in A$. Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ converge uniformemente.}$$

Non vale il viceversa: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$, $x \in (0,1)$.

Esercizio: dimostrare che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3 + x^3}$ converge uniformemente in $[0,a]$, $\forall\, a > 0$, ma non in $[0,+\infty)$.
Convergenza uniforme di serie ed integrazione: siano $f_n : [a,b] \to \mathcal{R}$ continue. Allora se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è uniformemente convergente si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx \ .$$

L'integrale di Lebesgue: teorema della convergenza monotona, della convergenza dominata e lemma di Fatou.
Esempio di una successione convergente di funzioni misurabili $f_n(x)$ tale che

$$\int_A \lim_n f_n(x)dx \neq \lim_n \int_A f_n(x)dx \ .$$

Con tale successione non si può applicare il teorema della convergenza dominata, perchè?

Esercizio: dire se $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_n \frac{n^2}{x^2+n^2}dx = \lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n^2}{x^2+n^2}dx$. Dimostrare l'affermazione sia con un conto diretto che con l'uso di qualche teorema appropriato.

Esempio che nel lemma di Fatou può valere il minore stretto.

12 dicembre 2005, mercoledi(2 ore)

Calcolare, al variare del parametro $\alpha \in \mathcal{R}$, $\displaystyle\lim_n \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$.

Esercizio: siano $f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$, $x \in [-1,1]$. Trovare $\lim_n f_n(x)$ e dimostrare che la convergenza non è uniforme. Dimostrare con un calcolo che tuttavia $\displaystyle\lim_n \int_{-1}^{1} f_n(x)dx = \int_{-1}^{1} \lim_n f_n(x)dx$. C'è qualche teorema che avrei potuto applicare per dimostrare tale uguaglianza, senza fare il calcolo effettivo?

Area di una superficie in $\mathcal{R}^3$, definizione, caso cartesiano.

Esercizio: calcolare l'area del grafico di $f(x,y) = xy$, $(x,y) \in B_2(0,0)$.

Esercizio (finestra di Viviani): calcolare l'area dell'intersezione della superficie sferica $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ con il cilindro $x^2+y^2 = Rx$.

Esercizio: calcolare l'area della porzione del piano $ax+by+cz+d = 0$, $c \neq 0$ che sta dentro il cilindro $x^2+y^2 = R^2$.

Esercizio: calcolare l'area della superficie

$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 = 10 \ , \ z \geq 2\sqrt{x^2+y^2}\right\}$

19 dicembre 2007, mercoledi, due ore

Integrali su superfici, formula di Gauss-Green, teorema della divergenza.

Esercizio: calcolare l'integrale superficiale $\displaystyle\int_\Sigma z \ d\sigma$, dove Σ è la parte laterale del cilindro $x^2+y^2 = R^2$ compresa tra i piani $z = 0$ e $z = y+b$, $b \geq R$.

Esercizio: usare la formula di Gauss-Green per calcolare $\displaystyle\int_{\S\gamma} y^2dx + xdy$, dove γ è la circonferenza unitaria percorsa in senso antiorario (anche il conto diretto).

Esercizio: calcolare $\displaystyle\int_{\partial B_1(0,0,0)} (x^2+y^2+z^2) \ d\sigma$

(calcolo diretto e calcolo con l'uso del teorema della divergenza).

Esercizio: calcolare il flusso del campo vettoriale $V(x,y,z) = (3xy^2-x^3, yz^2-y^3, 3x^2z)$ attraverso la superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3 \ : \ \frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2} = 1 \ , \ z \geq 0\right\}$.

Commenti su come aggirare il problema di calcolare un flusso attraverso una superficie non chiusa, pur usando il teorema della divergenza.

Esercizio: calcolare il flusso del campo vettoriale $V(x,y,z) = (0,0,\ln(1+x^2+y^2))$ attraverso la superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 = 1 \ , \ z \geq 0\right\}$.