ESERCIZI “ Cilindric il germano ”

1) Calcolare ∇f nei seguenti casi:
a)$f(x,y,z) = (x^y, z)$
b)$f(x,y,z) = (x+y)^z$
c)$f(x,y,z) = x^{y^z}$
d)$f(x,y) = 3x^2y + \frac{x}{y}$
e)$f(x,y) = (x^2+y^2, \sin x, \cos y)$
f)$f(x,y) = (x^{\ln y}, \arctan xy)$
g)$f(x,y,z,t) = (\ln\sqrt{x^2+y^2}, t^x, \frac{xyt}{1+z^2})$
h)$f(x,y,z) = (x+e^x, x^2+y\sin z)$

2) Calcolare ∇f per le seguenti funzioni, nei punti a fianco indicati:
a)$f(x,y) = (e^x\cos y, e^x\sin y)$, $(x,y) = (0,0)$
b)$f(x,y,z) = (x+y+z, xy+yz+xz, xyz)$, $(x,y,z) = (1,0,1)$
c)$f(x,y,z) = (x+e^y, x+y\sin z)$, $(x,y,z) = (1,1,\pi)$
d)$f(x,y) = (x\sin y, y^3, x^y)$, $(x,y) = (1,1)$
e)$f(x,y,z,t) = (t^3, xy^2)$, $(x,y,z,t) = (2,1,1,3)$

3) Sia $g(t) = (\cos t, \sin t)$. Calcolare $\nabla(f\circ g)$ nei casi
a) $f(x,y) = \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
b) $f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$

4) Sia $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ e sia $g(t) = (e^t, \cos t)$. Calcolare $\nabla(f\circ g)$.

5) Sia $f(x,y,z) = xy^z$ e sia $g(t) = (\arctan t, e^t, 2)$. Calcolare $\nabla(f\circ g)$.

6) Sia $g(t) = (2\cos t, t)$, $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ ed $E = \left\{t : -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right\}$. Verificare che $f(g(E)) = \partial B_1(1,0)$

7) Sia $f(t) = (t, \sin\frac{t}{2})$ e $g(x,y) = 2xe^{-y}$. Calcolare $\nabla(f \circ g)(\pi, \ln\frac{1}{2})$

8) Calcolare derivate prime, seconde e Laplaciano di $||x||$, $x \neq 0$ e di $||x||^2$, $x \neq 0$.

9) Per chi ha pazienza.

Sia $f \in \mathcal{R}^3$. Se considero le coordinate cilindriche $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$, ho che $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}$

10) Per chi ha molta pazienza.

Sia $f \in \mathcal{R}^3$. Se considero le coordinate sferiche $\begin{cases} x = r\sin\phi\cos\theta \\ y = r\sin\phi\sin\theta \\ z = \cos\phi \end{cases}$, ho che $\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\sin\phi\frac{\partial f}{\partial \phi}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 \theta}$