ESERCIZI ...riedificò l'edificio dell'analisi...
(Pisa, 1845-1918)

1) Mostrare che $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x + y^2 + y = 0$ definisce $y = g(x)$ in un intorno di $(x,y) = (0,0)$. Calcolare $g'(0)$, $g''(0)$.

2) Mostrare che $f(x,y) = x^2 + e^{xy} - 2y^3 - 2 = 0$ definisce $y = g(x)$ in un intorno di $(x,y) = (1,0)$. Calcolare $g'(1)$, $g''(1)$.

3) Mostrare che $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x + y^2 + y = 0$, $h(x,y) = x^5 + y^5 + x + y^2 + 10y = 0$, $l(x,y) = x^3 + y^4 + x + y^2 + 7y = 0$, $s(x,y) = x^7 + y^6 + x + y^2 + 13y = 0$ definiscono rispettivamente $y = y(x)$ in un intorno di $(x,y) = (0,0)$. Calcolare le varie $y'(0)$, $y''(0)$.

4) Posto $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine due della funzione $y = g(x)$ definita implicitamente dall'equazione $f(x,y) = 0$ in un intorno di $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

5) Sia $f(x,y) = xe^y + 3y - 6$:

a) trovare tutti i punti (x_0, y_0) tali che $f(x_0, y_0) = 0$ ma f nel punto non soddisfa le ipotesi del teorema della funzione implicita per l'esplicitabilità di y in funzione di x

b) scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine due della funzione $y = g(x)$ definita implicitamente dall'equazione $f(x,y) = 0$ in un intorno di $(0,2)$.

6) Calcolare il Laplaciano delle seguenti funzioni:

$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $g(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $h(x,y) = e^{\lambda x}\cos(\lambda y)$,

$t(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, $s(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, $x \neq 0$.

7) Determinare $a, b, c, d \in \mathcal{R}$ di modo che, per ogni $f : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ tale che $\Delta f = 0$, sia anche $\Delta F = 0$, dove $F(x,y) = f(ax + by, cx + dy)$. Le condizioni trovate, cosiderati (a,b) , (c,d) come vettori, che cosa significano?

8) Calcolare la matrice delle derivate della funzione $z = g(x,y)$ definita implicitamente dall'equazione $z(z - \sin x \sin y) = 0$, nel punto $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 1)$.

9) Calcolare la matrice delle derivate della funzione $(z,t) = g(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$ definita implicitamente dall'equazione $f(x,y,z,t) = 0$

($f(x,y,z,t) = (xz + t^2 - e^y, z + t)$) , nel punto $(1, \ln 2, 1, -1)$ (verifica esplicitando la z e la t).