ESERCIZI " ...direction home "

1) Dimostrare che la norma L_1 e la norma euclidea sono equivalenti

2) Dimostrare che le sfere chiuse sono insiemi chiusi

3) Trovare la frontiera dell'insieme $A \subset \mathcal{R}^2$,
$A = B_2(0,0) \setminus ([-1,1] \times \{0\}) \bigcup ([-1,1] \times \{3\})$

4) Siano $A = [0,1] \times (0,1)$, $B = B_1(0,0) \setminus \{(0,0)\}$. Determinare $intA$, $intB$, ∂A , ∂B , $\overline{A}$, $\overline{B}$

5) Studiare le derivate direzionali di $f(x,y,z) = |x+y+z|$ in $(x,y,z) = (1,-1,0)$

6) Sia $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Dire per quali direzioni α esiste $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(0,0)$; per tali α calcolarla.

7) Sia $f : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ differenziabile in (x_0, y_0) . Mostrare che

$$\frac{\partial f}{\partial(\alpha+\beta)}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial \beta}(x_0,y_0).$$

Posto $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, mostrare che

$$\frac{\partial f}{\partial(1,1)}(0,0) \neq \frac{\partial f}{\partial(0,1)}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial(1,0)}(0,0).$$

8) Sia $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Dimostrare che f è continua su $\mathcal{R}^2$ e che è derivabile in qualunque direzione, ma non è differenziabile (l'unico punto dubbio è $(0,0)$).