ESERCIZI in sottosuccessione.....

$n_1)$ Sia $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}\sin\frac{x}{n} & x \in [0, n\pi] \\ 0 & x > n\pi \end{cases}$. Dire se sono vere

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lim_n f_n(x)dx = \lim_n \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$

b) $\displaystyle\int_0^{1} \lim_n f_n(x)dx = \lim_n \int_0^{1} f_n(x)dx$.

$n_2)$ Sia $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 2n - n^2 x & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$.

Vale $\displaystyle\int_0^{1} \lim_n f_n(x)dx = \lim_n \int_0^{1} f_n(x)dx$? Osservare che non sono applicabili i teoremi della convergenza dominata e della convergenza monotona.

$n_3)$ Dire se sono vere le seguenti affermazioni:

i) $f \geq 0$ misurabile $\Longrightarrow \lim_n \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx = 0$

ii)$f \geq 0$ misurabile e $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx < +\infty \Longrightarrow \lim_n \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx = 0$

iii) $f \geq 0$ continua in $(0, 1)$ $\Longrightarrow \lim_n \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx = 0$

iv) $f \geq 0$ continua in $[0, 1]$ $\Longrightarrow \lim_n \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx = 0$

$n_4)$ Sia $f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n$. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \lim_n f_n(x)dx$ e $\displaystyle\lim_n \int_0^1 f_n(x)dx$; osservare che non si applicano i teoremi della convergenza dominata e della convergenza monotona.

$n_5)$ Calcolare

i) $\displaystyle\lim_n \int_0^1 \frac{dx}{n(\sqrt{x} + \sin^2 x)}\ dx$

ii) $\displaystyle\lim_n \int_0^1 e^{-nx^2}\ dx$

iii) $\lim_n \int_n^{n+1} \frac{e^{\sin x}}{x^2}\ dx$

n_6) Sia $f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0\ ,\ x \geq 1 \\ n^3 x & x \in (0, \frac{1}{n^2}) \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & x \in [\frac{1}{n^2}, 1) \end{cases}$.

Calcolare $\lim_n \int_{\mathcal{R}} f_n$, sia direttamente che con l'uso di qualche teorema appropriato.

n_7)

n_8)

......

......

n_k)

......

RISPOSTE

1) a) falsa , b) vera 2) no 4) i) falsa , ii) vera , iii) falsa , iv) vera

5) 0 , $+\infty$ 6) i) 0 , ii) 0 , iii) 0 7) 2