ESERCIZI sugli INTEGRALI DOPPI e TRIPLI

1) Calcolare $\displaystyle\int\int_D |\sin(x-y)|\ dxdy$, dove $D = [0,\pi]\times[0,\pi]$

2) Calcolare $\displaystyle\int\int_D e^{x-y}\ dxdy$, dove $D = [-1,1]\times[0,1]$

3) Calcolare $\displaystyle\int\int_D (x^2+y)\ dxdy$,
dove $D = \{(x,y)\in\mathcal{R}^2 : 1\le x\le 10\ ,\ 1\le y\le x^{10}\}$

4) Calcolare $\displaystyle\int\int_D \frac{1}{x}\ dxdy$, dove $D = \{(x,y)\in\mathcal{R}^2 : y\ge 0\ ,\ x^2+y^2-2x\le 0\}$

5) Calcolare $\displaystyle\int\int_D (1+x^2+y^2)\ dxdy$, dove D è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$

6) Calcolare $\displaystyle\int\int_D (1-xy)\ dxdy$,
dove $D = \{(x,y)\in\mathcal{R}^2 : 0\le x\le 1\ ,\ x^2\le y\le x\}$

7) Calcolare $\displaystyle\int\int_D x^2|y|\ dxdy$, dove $D = \{(x,y)\in\mathcal{R}^2 : |x|+|y|\le 1\}$

8) Calcolare il baricentro degli insiemi
$D_1 = \{(x,y)\in\mathcal{R}^2 : 1\le x\le a\ ,\ 0\le y\le \frac{1}{x^2}\}$, $a>1$
$D_2 = \{(x,y)\in\mathcal{R}^2 : 0\le y\le 1\ ,\ 0\le x\le 1+y^2\}$

9) Calcolare il volume del tetraedro limitato dai tre piani coordinati ed il piano $Ax+By+Cz=1$, $A,B,C>0$

10) Calcolare il volume della zona tra $z=1-x^2-y^2$ ed il piano $z=0$

11) Calcolare $\displaystyle\int\int_D \arctan(1+x^2+y^2)\ dxdy$, dove D è il settore circolare definito da $0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$, $r\le 1$

12) Calcolare $\displaystyle\int\int_D \left(\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2+y^2}{4}\right) dxdy$,
dove D è la regione interna alla circonferenza $x^2+y^2=2x$

13) Calcolare $\displaystyle\int\int_D a^{x^2+y^2}\ dxdy\ ,\ a \neq 1\ ,\ a > 0\ ,$
dove $D = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 : r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\ ,\ |y| \leq |x|\}$

14) Calcolare $\displaystyle\int\int_D \frac{xy}{(x^2 + y^2)^\alpha}\ dxdy\ ,$
dove $D = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 : r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\ ,\ x \geq 0\ ,\ y \geq 0\}$

15) Calcolare $\displaystyle\int\int_D e^{-(a^2x^2+b^2y^2)}\ dxdy\ ,$
dove $D = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 : a^2x^2 + b^2y^2 \leq 1\}\ ,\ a > 0\ ,\ b > 0$

16) Calcolare $\displaystyle\int\int\int_D xyz\ dxdydz\ ,$
dove $D = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 : 0 \leq z \leq 3\ ,\ x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$

17) Calcolare $\displaystyle\int\int_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\ dxdy$, dove D è il triangolo di vertici $(0, 0)\ ,\ (1, 0)\ ,\ (0, 1)$
(hint: usare il cambio di variabili $u = y - x\ ,\ v = y + x$)

18) Calcolare il volume dell'insieme $D = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 :\ (x^2+y^2)^2+4z^2 \leq 1\}$
usando il cambio di variabili $\begin{cases} x = r\sqrt{\sin\phi}\sin\theta \\ y = r\sqrt{\sin\phi}\cos\theta \\ z = \frac{r^2}{2}\cos\phi \end{cases}$

19) Calcolare $\displaystyle\int\int_D (x - y)^2 \sin^2(x + y)\ dxdy$, dove D è il quadrato di vertici $(0, \pi)\ ,\ (\pi, 0)\ ,\ (2\pi, \pi)\ ,\ (\pi, 2\pi)$

RISPOSTE

1) 2π 2) $e - 1 - \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2}$ 3) $\left.\frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{21}}{42} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{2}\right]_1^{10}$ 4) π

5) $\frac{4}{3}$ 6) $\frac{1}{8}$ 7) $\frac{1}{15}$ 8) $\left(\frac{a}{(a-1)}\ln a\ ,\ \frac{a}{2(a-1)}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3a^2}\right)\right)$, $\left(\frac{7}{10}\ ,\ \frac{9}{16}\right)$

9) $\frac{1}{6ABC}$ 10) $\frac{\pi}{2}$ 11) $\frac{\pi}{3}\arctan 2 - \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi}{12}\ln\frac{5}{2}$

12) $\frac{32}{9} - \frac{3\pi}{8}$ 13) $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\ln a}\left(a^{R^2} - a^{r^2}\right)$ 14) $\frac{1}{2}\cdot\begin{cases} \ln\frac{R}{2} & \alpha = 2 \\ \frac{R^{4-2\alpha} - r^{4-2\alpha}}{4-2\alpha} & \alpha \neq 2 \end{cases}$

15) $\frac{\pi}{ab}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ 16) 9 17) $\frac{1}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right)$ 18) $\frac{\pi^2}{4}$ 19) $\frac{\pi^4}{3}$