

ESERCIZI in successione...

- 1) Sia $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$. Dimostrare che $\lim_n f_n(x) = 0$, $\forall x \in [-1, 1]$.
Dire se la convergenza è uniforme
- 2) Dimostrare che la successione $f_n(x) = (1-x)x^n$ converge uniformemente a zero nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$
- 3) Sia $f_n(x) = n^p(\sin x)^n \cos x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $p \in \mathcal{R}$. Trovare $\lim_n f_n(x)$ e dimostrare che la convergenza è uniforme se e soltanto se $p < \frac{1}{2}$
- 4) Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2(n-1)}(x - \frac{1}{n}) + 1 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Trovare $f(x) = \lim_n f_n(x)$. Dire se la convergenza è uniforme in $[0, 1]$.

Dimostrare che $\int_0^1 f(x) dx = \lim_n \int_0^1 f_n(x) dx$.

- 5) Dimostrare che le serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^{\frac{3}{2}}}$ convergono uniformemente in \mathcal{R}
- 6) Calcolare $\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} dx$
- 7) Dimostrare che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge uniformemente ad e^x sui compatti, ma non su tutto \mathcal{R} (ricordare la condizione necessaria affinché una serie converga uniformemente)
- 8) Dimostrare che $\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$
- 9) Dimostrare che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ converge alla funzione

$$S(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \text{ (osservare che è una serie geometrica).}$$

Studiare se e dove la convergenza è uniforme (considerare la successione delle somme parziali $S_N(x)$)

10) Mostrare con un esempio che in generale il limite uniforme di funzioni lipschitziane non è lipschitziano (hint: pensare a poligonali che approssimano una radice....)

11)

12)

.....

n)

.....

.....

RISPOSTE

1) la convergenza non è uniforme

3) $\lim_n f_n(x) = 0$

4) la convergenza non è uniforme

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^3}$$

9) convergenza uniforme in $(-\infty, a]$ ed in $[a, +\infty)$ $\forall a > 0$