

ESERCIZI su MASSIMI e MINIMI

1. Trovare max e min assoluti di $f(x, y) = xe^{-x^2-y^2+x}$ in $\overline{B_{\sqrt{2}}(\frac{1}{2}, 0)}$.
2. Trovare max e min assoluti di $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ in $\overline{B_1(0, 0)}$.
3. Trovare max e min assoluti di $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x}{2} - y^2$ in $\overline{B_1(0, 0)}$.
4. Trovare i punti critici della funzione $f(x, y) = x^2y(x - 2y)$ e determinarne il carattere.
5. Trovare il massimo ed il minimo della funzione $f(x, y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^4}$ nel rettangolo $A = [1, 2] \times [-1, 1]$.
6. Trovare il massimo ed il minimo della funzione $f(x, y) = 2y^2 - x(x - 1)^2$ nel rettangolo $A = [0, 2] \times [-1, 1]$.
7. Studiare la funzione $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ nella corona

$$K_{r,R} = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2 \right\} .$$

8. Studiare la funzione $f(x, y) = xy$ su $\partial B_1(0, 0)$.
9. Trovare le quote massima e minima della curva intersezione della superficie $z = x^2 - xy + y^2$ con la superficie cilindrica $x^2 + y^2 = 4$.
10. Trovare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y) = x + y$ con il vincolo $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 2x = 0$.
11. Trovare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y) = xy$ con il vincolo $\phi(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $a, b > 0$.
12. Studiare i punti critici della funzione $f(x, y) = x^2 - x^2y^2 + y^2 + y^3$. Trovare massimo e minimo in $K = [-1, 1] \times [-1, 1]$.
13. Studiare i punti critici della funzione $f(x, y) = xye^{-x^2-y^4}$.
14. Studiare i punti critici della funzione $f(x, y) = x^3 - 12xy - 8y^3$.

15. Studiare i punti critici della funzione $f(x, y) = 3 - x^2 - 2y^2 + x + 5y$.
16. Studiare i punti critici della funzione $f(x, y) = (x + 1)^2 - y^2$.
17. Studiare i punti critici della funzione $f(x, y) = (1 + y^2)e^{-x^2}$.
18. Studiare i punti critici della funzione $f(x, y) = \cos^2 x + y^2$.
19. Studiare i punti critici della funzione $f(x, y) = \cos^2 x + y^2$.
20. Trovare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y) = xe^y$ con il vincolo $\phi(x, y) = x^2 + y^2 = 2$.
21. Trovare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y) = e^{2x+y}$ con il vincolo $\phi(x, y) = x^2 + y^2 = 5$.
22. Trovare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y) = 2x^3y$ con il vincolo $\phi(x, y) = x^2 + y^2 = 4$.
23. Trovare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y) = 4x^2y$ nell'insieme $\phi(x, y) = x^2 + y^2 \leq 3$.
24. Trovare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y) = x^2 + 3y - 3xy$ nella regione individuata dalle rette $y = x, y = 0, x = 2$.
25. Trovare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy$ nella regione individuata dalle rette $y = x, y = -3, x = 3$.
26. Trovare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ nella regione individuata dalle rette $y = x, y = 3, x = 0$.
27. Trovare il punto della retta $y = 3x - 4$ di minima distanza dal punto $(0, 0)$.
28. Trovare il punto della parabola $y = x^2$ di minima distanza dal punto $(3, 0)$.

RISPOSTE

- 1) $\max f = 1$ in $(1, 0)$; $\min f = -\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$ in $(-\frac{1}{2}, 0)$
- 2) $\max f = 1$ in $(0, 0)$; $\min f = 0$ in $x^2 + y^2 = 1$
- 3) $\max f = \frac{3}{2}$ in $(-1, 0)$; $\min f = -\frac{1}{16}$ in $(\frac{1}{4}, \pm\frac{\sqrt{15}}{4})$; $(\frac{1}{4}, \pm\frac{\sqrt{3}}{4})$ selle
- 4) $(0, y)$, $y \neq 0$ punti di massimo relativo ; $(0, 0)$ sella
- 5) $\max f = 1$ in $(1, \pm 1)$; $\min f = 0$ in $(x, 0)$, $1 \leq x \leq 2$
- 6) $\max f = 2$ in $(0, 1), (0, -1), (1, 1), (1, -1)$; $\min f = -2$ in $(2, 0)$
- 7) $\max f = \frac{1}{r^2}$ in $(r, 0)$ e $(-r, 0)$; $\min f = -\frac{1}{r^2}$ in $(0, r)$ e $(0, -r)$
- 8) $\max f = \frac{1}{2}$ in $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$; $\min f = -\frac{1}{2}$ in $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$
- 9) $\max f = 6$ in $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$; $\min f = 2$ in $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
- 10) $\max f = 1 + \sqrt{2}$ in $(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$; $\min f = 1 - \sqrt{2}$ in $(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$
- 11) $\max f = \frac{ab}{2}$; $\min f = -\frac{ab}{2}$ negli stessi punti di 8)
- 12) $(0, 0)$ min. rel. ; $(0, -\frac{2}{3})$, $(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, 1)$, $(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, 1)$ selle ;
in K : $\max f = 2$ in $(x, 1)$, $-1 \leq x \leq 1$;
 $\min f = 0$ in $(0, 0)$ e $(x, -1)$, $-1 \leq x \leq 1$
- 13) $(0, 0)$ sella ; $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ massimi rel. ;
 $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ minimi rel.