

ESERCIZI su INTEGRALI SUPERFICIALI

- 1) Calcolare l'integrale superficiale $\int_S \frac{1}{\rho^2} d\sigma$, dove $\rho = \rho(x, y, z)$ indica la distanza tra il punto (x, y, z) e $(0, 0, 0)$, ed S è la parte del cilindro $\{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 : x^2 + y^2 = 64\}$ compresa tra i piani $z = 0$ e $z = 1$
- 2) Calcolare l'integrale superficiale $\int_{\Sigma} (x + y + z) d\sigma$, dove Σ è la parte della sfera unitaria contenuta in $\{x > 0, y > 0, z > 0\}$
- 3) Usare la formula di Gauss-Green per calcolare $\int_{\gamma} 3y^3 dx + x dy$, dove γ è la frontiera del quadrato di vertici $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 2)$, percorsa in senso antiorario
- 4) Calcolare $\int_{\partial B_1(0,0,0)} (x^4 + y^4 + z^4) d\sigma$
- 5) Calcolare $\int_{\partial B_1(0,0,0)} (x + y + z) d\sigma$
(calcolo diretto ed calcolo con l'uso del teorema della divergenza)
- 6) Calcolare il flusso di

$$V(x, y, z) = (0, 0, f(x, y))$$

attraverso la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$, quando

- a) $f(x, y) = \frac{1}{r^\alpha}$, $\alpha < 2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- b) $f(x, y) = \arcsin(x^2 + y^2)$
- c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$
- d) $f(x, y) = \sin^2(x^2 + y^2)$
- e) $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$

7) Calcolare il flusso di

$$V(x, y, z) = (xz^2, x^2y - z^3, 2xy + y^2z)$$

attraverso la superficie $\Sigma = \partial D$, dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$$

8) Sia $G = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Calcolare il flusso di

$$V(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

attraverso la superficie ∂G (provare anche con un conto diretto)

9) Calcolare l'area della superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 10, z \geq 2\sqrt{x^2 + y^2}\}$$

10) Calcolare l'integrale $\int_{\Sigma} \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} \right) z d\sigma$, dove

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z > 0\}$$

ed α, β, γ sono le componenti della normale esterna a Σ

11) Sia $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 < z < x + 2\}$,

siano $V(x, y, z) = (y, z, x)$, $N(x, y, z) = \frac{(x, y, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Calcolare l'integrale $\int_{\Sigma} \text{rot} V \bullet N d\sigma$

RISPOSTE

1) $2\pi \arctan \frac{1}{8}$ 2) $\frac{3}{4}\pi$ 3) -44 4) $\frac{12}{5}\pi$ 5) 0

6) a) $\frac{2\pi}{2-\alpha}$, b) $\frac{\pi^2}{2} - \pi$, c) $2\pi(e-2)$, d) $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \sin 2$, e) $\pi(2 \ln 2 - 1)$

7) $\frac{2}{5}\pi$ 8) 12π 9) $20\pi \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ 10) $\frac{\pi}{4} abc^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{c^2}\right)$ 11) $-\pi$