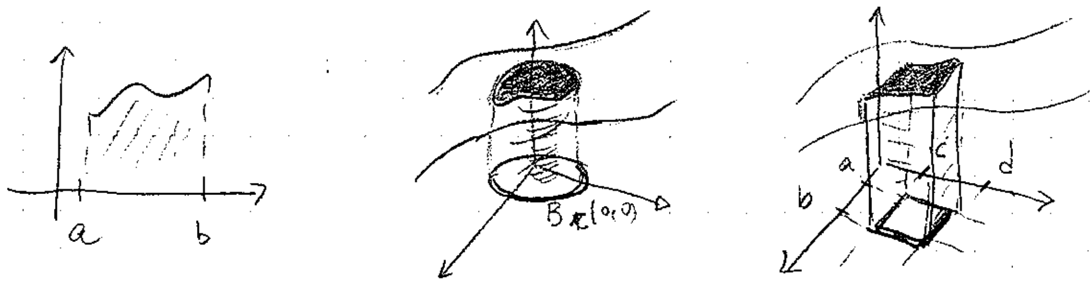
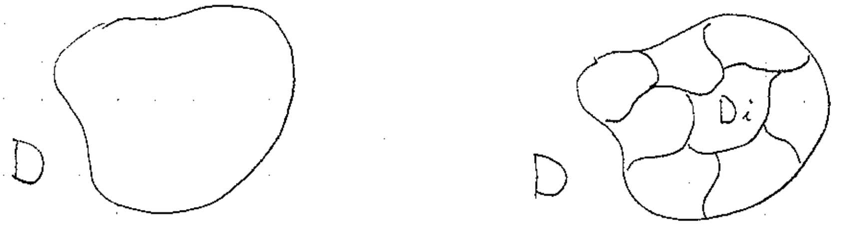
INTEGRALI MULTIPLI

L'idea per definire l'integrale in $\mathbb{R}^n$ è la stessa usata per $\mathbb{R}$. Bisogna però osservare che, mentre in $\mathbb{R}$ il dominio è un intervallo, in $\mathbb{R}^n$ il dominio può essere fatto in molti modi.

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad ; \quad \int_{B_r(0,0)} f(x,y)\,dx\,dy \qquad \int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy$$



Proprio per questo la prima cosa da fare è dare una definizione di misura di un insieme in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots \mathbb{R}^n$, di partizione di un insieme e di norma di una partizione di un insieme.



partizione di D

Diamo innanzitutto una definizione di "misurabilità" di un insieme; esaminiamo il caso $n=2$, ma per n generico si sviluppa ogni cosa in modo analogo.

DEFINIZIONE

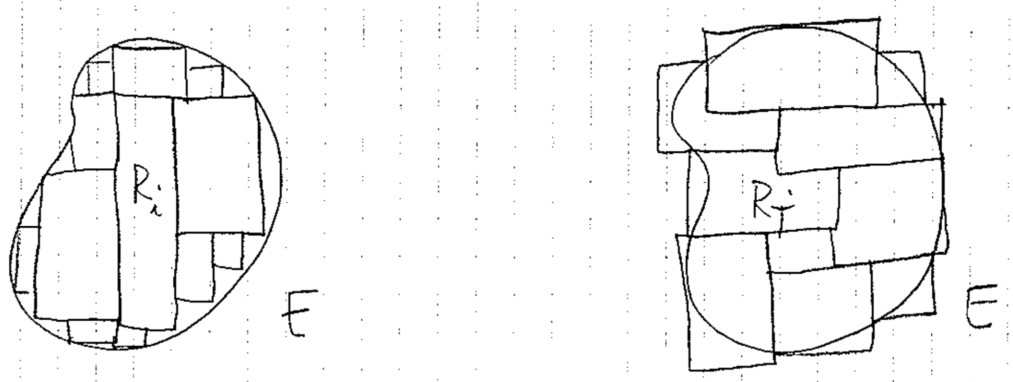
Un insieme limitato $E \subset \mathbb{R}^2$ si dice misurabile secondo Peano-Jordan se

$$(\bullet) \quad \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} \text{area } R_i \ , \ R_i \text{ rettangoli con interni a due a due disgiunti}, \ \bigcup_{i=1}^{n} R_i \subset E \right\} =$$

$$= \inf\left\{ \sum_{j=1}^{m} \text{area } R_j \ , \ R_j \text{ rettangoli con interni a due a due disgiunti}, \ \bigcup_{j=1}^{m} R_j \supset E \right\}$$

In questo caso il valore comune $(\bullet)$ si chiama area di E. Per brevità scriveremo

$$\text{area di } E = |E|.$$



NOTA

Ovviamente in $(\bullet)$ vale sempre il $\leq$; però può verificarsi anche il $<$, come mostra il seguente esempio:

ESEMPIO

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{Q},\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$$

Poiché

$\bigcup_{i=1}^{n} R_i \subset E$, R_i rettangoli $\Rightarrow |R_i| = 0 \quad \forall i=1,\dots,n$

$\bigcup_{j=1}^{m} R_j \supset E$, R_j rettangoli $\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{m} R_j \supset [0,1]\times[0,1]$ e quindi $\left|\bigcup_{j=1}^{m} R_j\right| \ge 1$

in questo caso risulta

$$\sup\{\dots\dots \bigcup_{i=1}^{n} R_i \subset E\} = 0$$

$$\inf\{\dots\dots \bigcup_{j=1}^{m} R_j \supset E\} = 1$$

—

Nel seguito quando parleremo di domini in $\mathbb{R}^2$ ci riferiremo sempre ad insiemi misurabili. Si può dimostrare che

i) i poligoni sono misurabili e la loro area è quella nota della geometria elementare

ii) Se $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$, E_i misurabile $\forall i=1,\dots,n$, $E_i \cap E_j = \emptyset \ \forall i \ne j$,

allora E è misurabile e vale

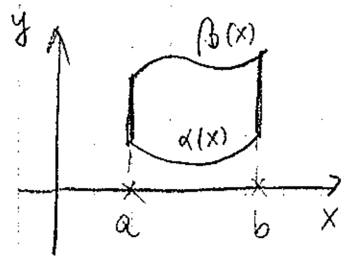
$$|E| = |E_1| + |E_2| + \dots + |E_n|$$

Un comodo ed utile criterio di misurabilità (di cui tralasciamo la dimostrazione in generale) è il seguente

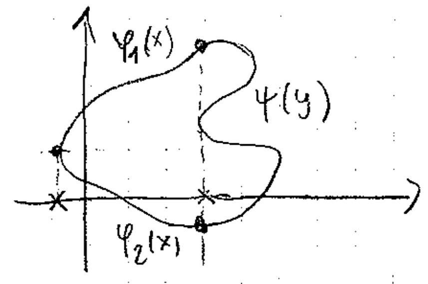
CRITERIO

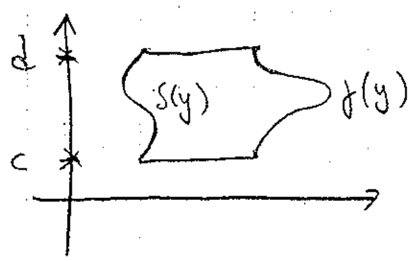
Un insieme limitato $E \subset \mathbb{R}^2$ è misurabile sse $|\partial E| = 0$.

In particolare sono misurabili gli insiemi limitati la cui frontiera è costituita da un numero finito di archi di curve ognuno dei quali è rappresentabile nella forma $y = \varphi(x)$ oppure $x = \psi(y)$, con φ, ψ continue su un intervallo chiuso:



(normale rispetto ad y)

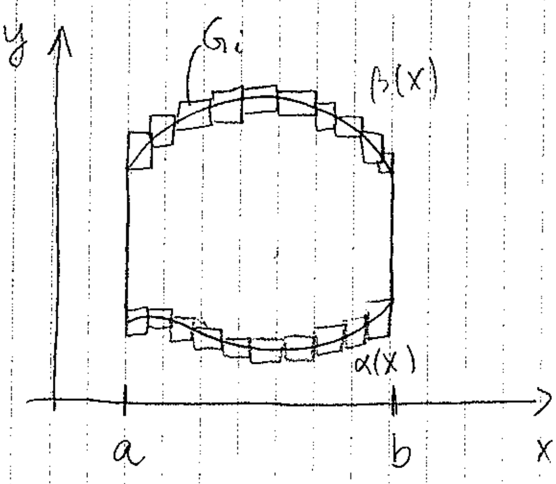




(normale rispetto ad x)

Si noti che nell'esempio precedente (di insieme non misurabile) si ha $\partial E = [0,1] \times [0,1]$ e quindi $|\partial E| = 1 \neq 0$.

Vediamo adesso la dimostrazione della misurabilità nel caso particolare di domini normali rispetto ad y. Sia $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$ con $\alpha(x), \beta(x)$ funzioni continue definite su $[a,b]$.



Poiché $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ sono continue su $[a,b]$, sono anche uniformemente continue, quindi $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c.

$$|\alpha(x_1) - \alpha(x_2)| < \varepsilon \quad \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta$$

$$|\beta(x_1) - \beta(x_2)| < \varepsilon \quad \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta$$

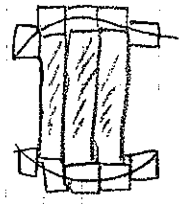
Quindi i grafici di α e di β sono contenuti in un insieme finito di rettangoli $G_1, G_2, \dots G_p$ di base δ ed altezza ε. L'area complessiva di questi rettangoli è

$$\text{area}\left(\bigcup_{i=1}^{p} G_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \text{area } G_i = 2\varepsilon(b-a).$$

Osserviamo inoltre che l'insieme $E - \bigcup_{i=1}^{p} G_i = \bigcup_{i=1}^{p} R_i \subset E$

Siamo quindi nella situazione

$$\bigcup_{i=1}^{p} R_i \subset E \subset \left(\bigcup_{i=1}^{p} R_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{p} G_i\right) = \bigcup_{i=1}^{p} \tilde{R}_i$$



e vale

$\bigcup_{i=1}^{p} R_i$ e $\bigcup_{i=1}^{p} G_i$ sono disgiunti

$$\left|\text{area}\left(\bigcup_{i=1}^{p} R_i\right) - \text{area}\left(\bigcup_{i=1}^{p} \tilde{R}_i\right)\right| =$$

$$= \left|\text{area}\left(\bigcup_{i=1}^{p} R_i\right) - \text{area}\left(\bigcup_{i=1}^{p} R_i\right) - \text{area}\left(\bigcup_{i=1}^{p} G_i\right)\right| =$$

$$= \text{area}\left(\bigcup_{i=1}^{p} G_i\right) = 2(b-a)\cdot\varepsilon$$, cioè E è misurabile

PARTIZIONI

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ limitato e misurabile; chiameremo <u>partizione</u> $\mathcal{P}$ di D di <u>norma $\le \delta$</u>, $\delta > 0$, una qualunque famiglia finita $D_1, D_2, \dots, D_n$ di insiemi misurabili tali che

$P_1)$ $\bigcup_{i=1}^{n} D_i = D$

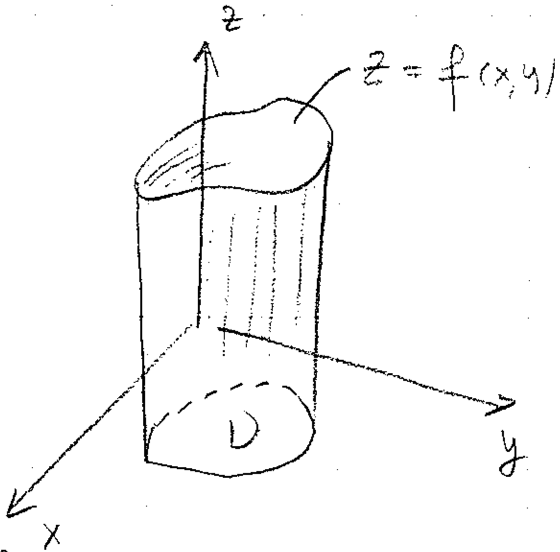
$P_2)$ $|D_i \cap D_j| = 0 \quad \forall i \neq j \quad 1 \le i, j \le n$

$P_3)$ diametro $D_i \le \delta \quad \forall i = 1, \dots, n$

dove ricordiamo che, dato $F \subset \mathbb{R}^2$,

$$\text{diametro } F = \sup \{ d(P,Q),\ P, Q \in F \}$$

INTEGRALI DOPPI



L'integrale doppio di una funzione limitata $z = f(x,y) \geq 0$ su un dominio misurabile $D \subset \mathbb{R}^2$, può essere motivato dal problema della determinazione del volume della regione tridimensionale $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x,y) \in D,\ 0 \le z \le f(x,y)\}$

Per ogni partizione $\mathcal{P} = \{D_1, \dots, D_n\}$ consideriamo le quantità

$$\sum_{i=1}^{n} \sup_{D_i} f \cdot |D_i| \qquad \sum_{i=1}^{n} \inf_{D_i} f \cdot |D_i| ,$$

Poiché le precedenti quantità appaiono come approssimazioni per eccesso e per difetto rispettivamente, di quello che dovrebbe essere il volume di E, è naturale dare la seguente

DEFINIZIONE

f si dice integrabile su D se

$$(*) \quad \inf_{\mathcal{P}} \left(\sum_{i=1}^{n} \sup_{D_i} f \cdot |D_i| \right) = \sup_{\mathcal{P}} \left(\sum_{i=1}^{n} \inf_{D_i} f \cdot |D_i| \right) ,$$

dove sup ed inf sono fatti su tutte le partizioni $\mathcal{P}$ di D.

In questo caso il valore comune (*) si chiama integrale di f su D e lo si indica con il simbolo

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{oppure} \quad \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

Notiamo che in generale in (*) vale il $\geq$, ma può valere il $>$; ad esempio

Sia $D = [0,1] \times [0,1]$

Sia $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ e } y \text{ sono razionali} \\ 0 & \text{se } x \text{ oppure } y \text{ è irrazionale} \end{cases}$

(f è la funzione caratteristica dell'insieme non misurabile visto precedentemente)

Risulta

$$\inf_{P} \left(\sum_{i=1}^{n} \sup_{D_i} f \cdot |D_i| \right) = 1 \quad , \quad \sup_{P} \left(\sum_{i=1}^{n} \inf_{D_i} f \cdot |D_i| \right) = 0$$

e quindi f non è integrabile.

Vediamo ora un importante teorema riguardante l'integrabilità delle funzioni continue

TEOREMA

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$, limitato chiuso e misurabile

Sia $f: D \to \mathbb{R}$ continua, $f \geq 0$.

Allora f è integrabile su D

dimostrazione:

facciamo la dimostrazione con l'ipotesi in più di Lipschitzianità, cioè supp. che $\exists\, L \in \mathbb{R}$ tale che

$$|f(P) - f(Q)| \leq L \|P - Q\| \quad \forall P, Q \in D$$

Poiché in (*) vale sempre il $\geq$, basta dimostrare che nel nostro caso vale anche il $\leq$.

Procediamo così:

fissato $\delta>0$, sia $\mathcal{P}_\delta=\{\Delta_1, \dots, \Delta_p\}$ una partizione di D di norma $\leq\delta$.

Poiché $\forall k=1, \dots, p$ si ha

$$|f(P)-f(Q)|\leq L\delta \quad \forall P,Q\in\Delta_k$$

cioè, in particolare

$$f(P)\leq f(Q)+L\delta \quad \forall P,Q\in\Delta_k \;,\; k=1,\dots,p,$$

risulta (faccio il sup su P)

$$\sup_{\Delta_k} f\leq f(Q)+L\delta \quad \forall Q\in\Delta_k \;,\; k=1,\dots,p$$

e perciò (faccio l'inf su Q)

$$\sup_{\Delta_k} f\leq \inf_{\Delta_k} f+L\delta \qquad k=1,\dots,p$$

Ne segue che

$$\sum_{k=1}^{p}\sup_{\Delta_k} f\cdot|\Delta_k|\leq\sum_{k=1}^{p}\inf_{\Delta_k} f\cdot|\Delta_k|+L\delta\sum_{k=1}^{p}|\Delta_k|$$

$$\leq\sup_{\mathcal{P}}\left(\sum_{i}\inf_{D_i} f\cdot|D_i|\right)+L\delta|D|$$

ed infine

$$\inf_{\mathcal{P}}\left(\sum_i \sup_{D_i} f\cdot|D_i|\right)\le \sum_{k=1}^{p}\sup_{\Delta_k} f\,|\Delta_k|\le$$

$$\le \sup_{\mathcal{P}}\left(\sum_i \inf_{D_i} f\cdot|D_i|\right)+L\delta|D|\,,$$

cioè

$$\inf_{\mathcal{P}}\left(\sum_i \sup_{D_i} f\,|D_i|\right)\le \sup_{\mathcal{P}}\left(\sum_i \inf_{D_i} f\cdot|D_i|\right)$$

ed il Teorema è dimostrato.

SOMME DI RIEMANN

Siano f, D come nel Teorema precedente. Per ogni partizione $\mathcal{P}=\{D_1,\dots,D_m\}$ di D e per ogni scelta di punti $P_i\in D_i$, $i=1,\dots,m$, formiamo le somme

$$\sum_{i=1}^{m} f(P_i)\cdot|D_i|$$

dette somme di Riemann. Vediamo che

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{m} f(P_i)\cdot|D_i|$$

$(\delta = \text{norma di } \mathcal{P})$

Cioè dimostriamo che $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0$ tale che

$$\left| \sum_{i=1}^{m} f(P_i)|D_i| - \int_D f(x,y)\,dx\,dy \right| < \varepsilon \quad \forall \text{ partizione } \mathcal{P} \text{ di ampiezza } \leq \delta$$

Basta scegliere $\delta>0$ tale che $L\delta|D| < \varepsilon$, infatti

$$\sum_{i=1}^{m} \inf_{D_i} f \cdot |D_i| \leq \sum_{i=1}^{m} f(P_i)\cdot|D_i| \leq \sum_{i=1}^{m} \sup_{D_i} f \cdot |D_i|$$

$$\sum_{i=1}^{m} \inf_{D_i} f \cdot |D_i| \leq \int_D f(x,y)\,dx\,dy \leq \sum_{i=1}^{m} \sup_{D_i} f \cdot |D_i|$$

e quindi

$$\left| \sum_{i=1}^{m} f(P_i)\cdot|D_i| - \int_D f(x,y)\,dx\,dy \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \sup_{D_i} f \cdot |D_i| - \sum_{i=1}^{m} \inf_{D_i} f \cdot |D_i| \leq$$

$$\leq L\delta|D| < \varepsilon$$

#

Finora abbiamo considerato solo funzioni nonnegative; per il caso generale osserviamo che, posto

$$f^+ = \frac{|f|+f}{2} \quad , \quad f^- = \frac{|f|-f}{2} ,$$

si ha $f^+ \geq 0$, $f^- \geq 0$ ed $f = f^+ - f^-$

Diciamo allora che f è integrabile sse lo sono f^+ ed f^- e poniamo

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_D f^+(x,y)\,dx\,dy - \int_D f^-(x,y)\,dx\,dy.$$

PROPRIETÀ dell'integrale

Siano $f, g : D \to \mathbb{R}$ integrabili, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora

a) $|D| = 0 \Rightarrow \int_{|D|} f(x,y)\,dx\,dy = 0$

b) $\int_D dx\,dy = |D|$

c) $\left. \begin{array}{l} D = A \cup B \text{ , } A, B \text{ misurabili} \\ |A \cap B| = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \int_D f\,dx\,dy = \int_A f\,dx\,dy + \int_B f\,dx\,dy$

d) $\int_D (\lambda f + \mu g)\,dx\,dy = \lambda \int_D f\,dx\,dy + \mu \int_D f\,dx\,dy$

e) $f \leq g$ su $D \Rightarrow \int_D f\,dx\,dy \leq \int_D g\,dx\,dy$

f) $\left|\int_D f\,dx\,dy\right| \le \int_D |f|\,dx\,dy$

limitiamoci a mostrare come f) segua da d) ed e); infatti, si ha

$$-|f| \le f \le |f| \overset{e)}{\Longrightarrow} \underbrace{\int_D -|f|\,dx\,dy}_{\overset{d)}{=}\, -\int_D |f|\,dx\,dy} \le \int_D f\,dx\,dy \le \int_D |f|\,dx\,dy$$

cioè $-\int_D |f|\,dx\,dy \le \int_D f\,dx\,dy \le \int_D |f|\,dx\,dy$ e quindi vale f)

g) vale la disuguaglianza di Schwartz

$$\left|\int_D (f\cdot g)\,dx\,dy\right| \le \sqrt{\int_D f^2\,dx\,dy}\cdot\sqrt{\int_D g^2\,dx\,dy}$$

Cerchiamo ora metodi per calcolare integrali doppi. La via è essenzialmente quella di ricondursi al calcolo di integrali di funzioni di una variabile. Gli strumenti fondamentali sono due

1) il teorema di FUBINI, che permette di vedere un integrale di due variabili come due integrazioni successive di una variabile

2) la formula di cambio di variabili, che permette di scrivere un integrale in modo più "trattabile" (sempre

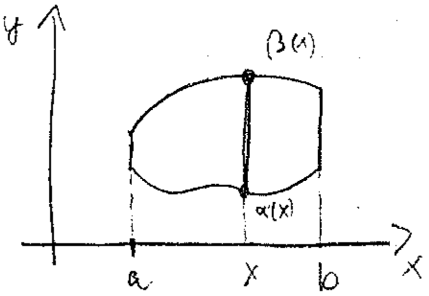
in vista del teorema di Fubini): l'analogo in una variabile dell'integrazione per sostituzione

IL TEOREMA di FUBINI

Consideriamo il caso in cui

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\} \qquad (1)$$

con $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

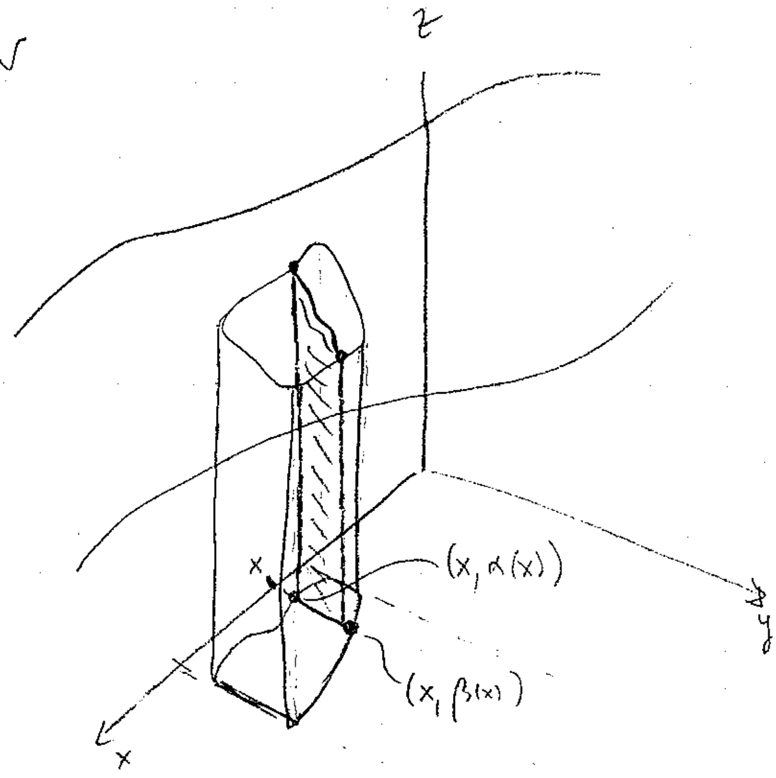


Per calcolare l'integrale

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy, \quad f \ge 0$$

si può pensare al solido

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ 0 \le z \le f(x,y)\}$$



scomposto in "fette"

$$E_x = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \alpha(x) \le y \le \beta(x),\ 0 \le z \le f(x,y)\}$$

con $x \in [a,b]$ fissato. L'area della "fetta" E_x è data dall'integrale d'una variabile

$$A(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \qquad (x \in [a,b] \text{ fissato})$$

È quindi del tutto naturale pensare che il volume di E si possa ottenere integrando i contributi delle singole fette, cioè

$$\text{vol } E = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \,,$$

cioè

$$\boxed{\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx} \qquad (2)$$

(la restrizione $f \geq 0$ si elimina poi facilmente ricordando che $\int f = \int f^+ - \int f^-$)

Naturalmente se D è del tipo

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d \,,\ \gamma(y) \leq x \leq \delta(y) \} \qquad (3)$$

con $\gamma, \delta : [c,d] \to \mathbb{R}$ continue, analogamente si avrà

$$\boxed{\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx \right) dy} \qquad (4)$$

la validità di questi risultati è assicurata dal seguente

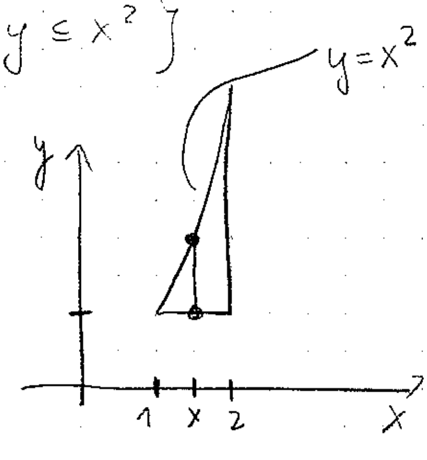
TEOREMA (DI FUBINI)

Sia $f : D \to \mathbb{R}$ continua, se D è descritto da (1) allora vale la formula (2). Analogamente, se D è descritto da (3), allora vale la formula (4)

ESERCIZIO

Calcolare $I = \int_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2 \;,\; 1 \le y \le x^2\}$$



Ris.

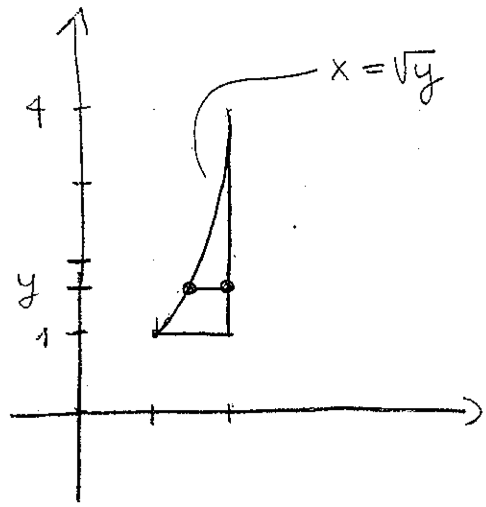
$$I = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_1^{x^2} (x^2+y^2)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_1^2 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=1}^{y=x^2} dx = \int_1^2 \left(x^4 + \frac{x^6}{3} - x^2 - \frac{1}{3} \right) dx = \frac{1006}{105}$$

OSSERVAZIONE

È possibile che il dominio di integrazione si possa descrivere sia nella forma (1) che nella forma (3). Ad esempio il dominio D dell'esercizio precedente può essere anche descritto come

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ 1 \le y \le 4 ,\ \sqrt{y} \le x \le 2\}$$



e quindi si potrebbe fare

$$I = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_1^4 \left(\int_{\sqrt{y}}^{2} (x^2+y^2)\,dx \right) dy =$$

$$= \int_1^4 \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \Big|_{x=\sqrt{y}}^{x=2} \right) dy =$$

$$= \int_1^4 \left(\frac{8}{3} + 2y^2 - \frac{(\sqrt{y})^3}{3} - y^{3/2} \right) dy = \frac{1006}{105}$$

In questi casi non è sempre indifferente uno o l'altro delle due descrizioni (che corrispondono ad ordini di integrazione diversi). Vediamo un esempio dove, con una delle due descrizioni del dominio, addirittura non si può fare il calcolo.

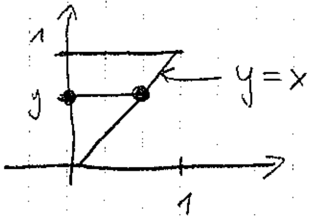
ESEMPIO

Calcolare $I = \iint_D e^{y^2}\,dx\,dy$, dove D è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$.

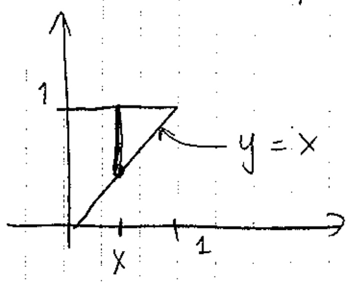
Ris:

Il dominio D di integrazione si può descrivere in due modi:

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y\}$



$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1\}$



Se applichiamo il teorema di Fubini con la prima descrizione, otteniamo

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^y e^{y^2}\,dx \right) dy = \int_0^1 \left(e^{y^2}\, x \Big|_{x=0}^{x=y} \right) dy = \int_0^1 y e^{y^2}\,dy = \frac{1}{2} e^{y^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$$

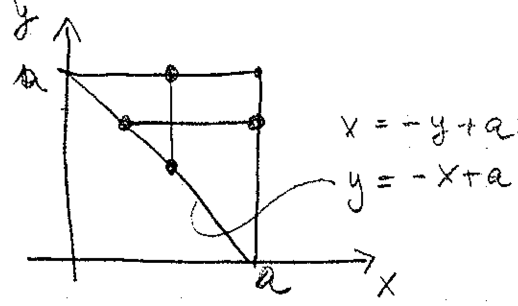
Se invece applichiamo il teorema di Fubini con la seconda descrizione, otteniamo

$$I = \int_0^1 \left(\int_x^1 e^{y^2}\,dy \right) dx$$

, ma e^{y^2} non ha una primitiva esprimibile in termini elementari e quindi non possiamo portare a termine il calcolo.

ESERCIZIO (spezzamento della funzione integranda)

Calcolare $I = \iint_D \frac{x^2+y^2}{x+y}\,dx\,dy$, dove D è il triangolo di vertici $(a,0)$, (a,a), $(0,a)$,



Risoluzione:

Osservando che la funzione $\frac{x^2+y^2}{x+y} = \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{x+y}$,

viene naturale usare per il primo addendo un'integrazione con Fubini prima in dy, mentre per il secondo addendo una integrazione con Fubini prima in dx. Quindi

$$\iint_D \frac{x^2+y^2}{x+y}\,dx\,dy = \iint_D \frac{x^2}{x+y}\,dx\,dy + \iint_D \frac{y^2}{x+y}\,dx\,dy =$$

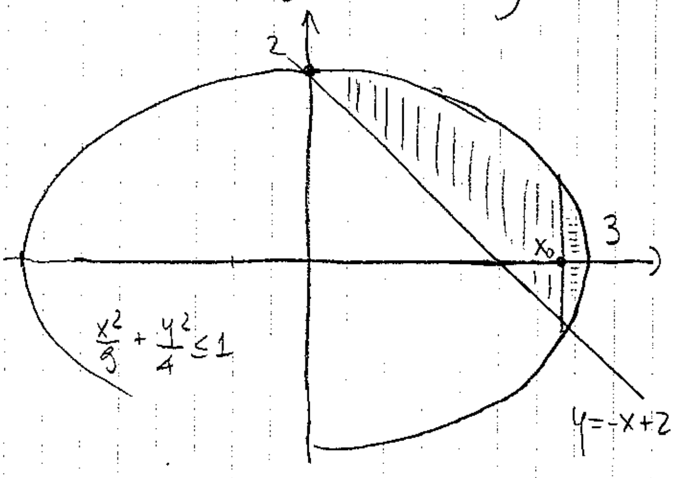
$$= \int_0^a \left(\int_{-x+a}^{a} \frac{x^2}{x+y}\,dy \right) dx + \int_0^a \left(\int_{-y+a}^{a} \frac{y^2}{x+y}\,dx \right) dy =$$

$$= \int_0^a \left(x^2 \lg(x+y) \Big|_{y=-x+a}^{y=a} \right) dx + \int_0^a \left(y^2 \lg(x+y) \Big|_{x=-y+a}^{x=a} \right) dy =$$

$$= \int_0^a x^2 [\lg(x+a) - \lg a]\,dx + \int_0^a y^2 [\lg(y+a) - \lg a]\,dy = \text{ecc. ecc.}$$

ESERCIZIO (spezzamento del dominio D)

Calcolare $\iint_D dx\,dy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1, \; y \ge -x+2\}$



Ris.:

Visto la natura del dominio D, conviene dividerlo ad esempio nei domini D_1, D_2 dati da

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \; 0 \le x \le x_0, \; -x+2 \le y \le 2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\}$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \; x_0 \le x \le 3, \; -2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} \le y \le 2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\},$$

che sono domini normali rispetto ad y e quindi ideali per applicare Fubini. Si ha

$$\iint_D dx\,dy = \iint_{D_1} dx\,dy + \iint_{D_2} dx\,dy = \int_0^{x_0}\left(\int_{-x+2}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} dy\right)dx + \int_{x_0}^{3}\left(\int_{-2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} dy\right)dx =$$

$$= \int_0^{x_0}\left(2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} + x - 2\right)dx + \int_{x_0}^{3} 4\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\,dx = \qquad \frac{x}{3} = \operatorname{sen} t \quad dx = 3\cos t\,dt$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x\Big|_0^{x_0} + \int_0^{\operatorname{arcsen} x_0} 2\cos t \cdot 3\cos t\,dt + \int_0^{\operatorname{arcsen} x_0} 4\cos t \cdot 3\cos t\,dt = \text{ecc. ecc.},$$

Trovo x_0: $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = -x+2 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{(2-x)^2}{4} + \frac{x^2}{9} = 1 \\ — \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{4+x^2-4x}{4} + \frac{x^2}{9} = 1 \\ — \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{36}{13} \; (x_0) \\ x = 0 \end{cases}$

INTEGRALI DI FUNZIONI DI TRE VARIABILI

Il concetto d'integrale visto per funzioni di due variabili può essere esteso in modo naturale al caso di funzioni di più variabili, con proprietà analoghe a quelle viste in precedenza. Vediamo ad esempio il caso di tre variabili

$$f = f(x,y,z)$$

dove $f : D \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e $D \subset \mathbb{R}^3$ è la regione

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x,y) \in A,\ \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y)\}$$

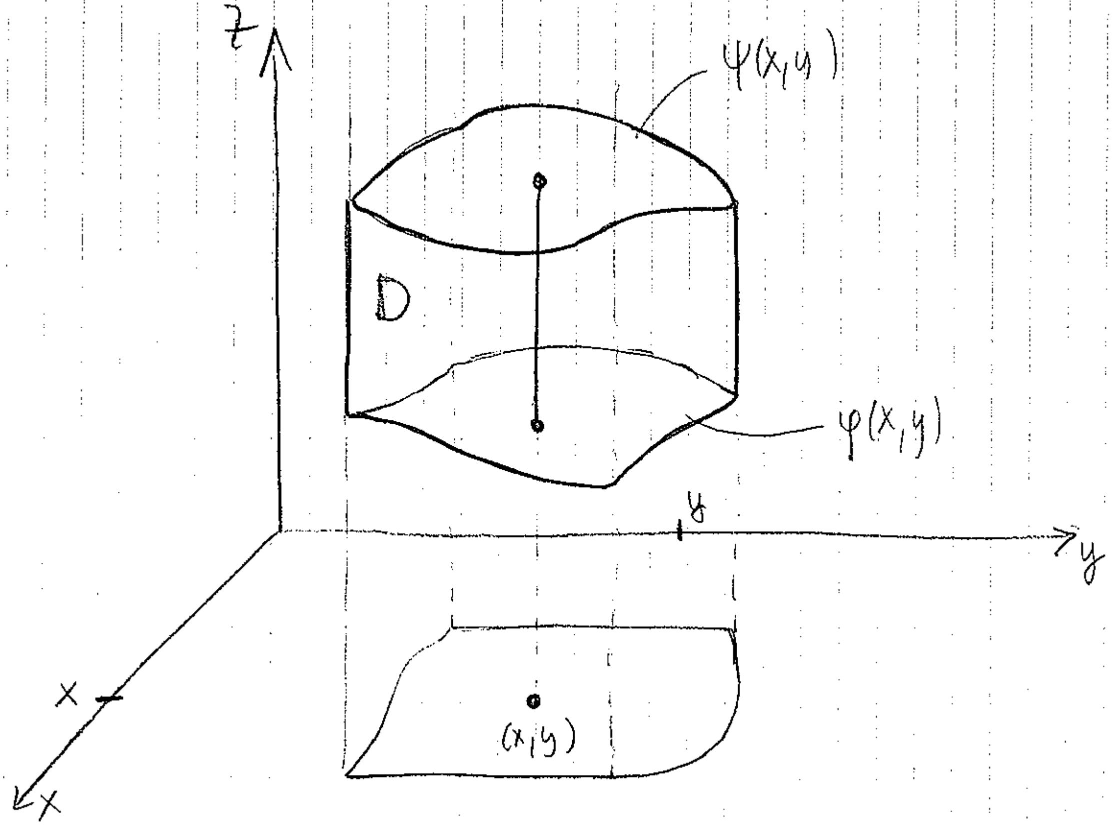
dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b\ ;\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$

$\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $\varphi, \psi : A \to \mathbb{R}$ continue.

Si ha allora il teorema di FUBINI per integrali tripli

$$\boxed{\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz} = \int_A \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy =$$

$$(5) \qquad \boxed{= \int_a^b \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right] dx}$$



(prima fisso (x,y) e integro f in dz tra $\varphi(x,y)$ e $\psi(x,y)$; mi resta così un integrale in $dx\,dy$ che trasformo come già detto per due variabili)

Formule analoghe alla (5) possono essere scoperte dallo studente, nei casi in cui D abbia una rappresentazione diversa da quella descritta

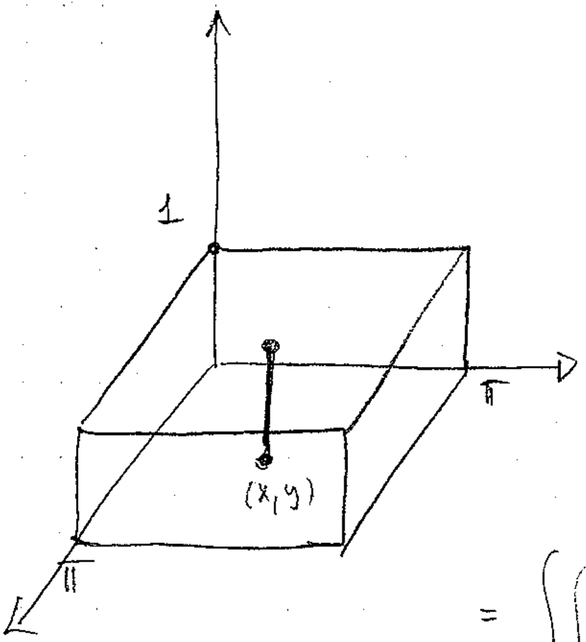
ESEMPIO 1

Calcolare $I = \iiint_D z \operatorname{sen}(x+y)\,dx\,dy\,dz$,

dove

$$D = [0,\pi]\times[0,\pi]\times[0,1]$$

(quindi nel caso semplice in cui $\alpha, \beta, \varphi, \psi$ sono costanti)



fisso (x,y) ed integro prima in dz

$$\iiint_D z \operatorname{sen}(x+y)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint_{[0,\pi]\times[0,\pi]} \left(\int_0^1 z \operatorname{sen}(x+y)\,dz \right) dx\,dy =$$

$$= \iint_{[0,\pi]\times[0,\pi]} \left(\operatorname{sen}(x+y)\, \frac{z^2}{2} \Big|_{z=0}^{z=1} \right) dx\,dy = \frac{1}{2} \iint_{[0,\pi]\times[0,\pi]} \operatorname{sen}(x+y)\,dx\,dy =$$

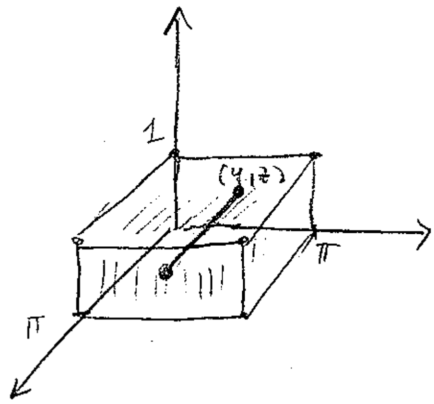
$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x+y)\,dx \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(-\cos(x+y) \Big|_{x=0}^{x=\pi} \right) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos y + \cos y)\,dy = \int_0^{\pi} \cos y\,dy = -\operatorname{sen} y \Big|_0^{\pi} = 0$$

In questo caso, poiché x, y, z sono variabili indipendenti tra loro, posso usare indifferentemente qualunque ordine di integrazione.
Ad esempio, posso fissare (y,z) ed integrare prima in dx:

$$I = \iint_{[0,\pi]\times[0,1]} \left(\int_0^{\pi} z \operatorname{sen}(x+y)\,dx \right) dy\,dz$$

$$= \iint_{[0,\pi]\times[0,1]} \left(z(-\cos(x+y))\Big|_{x=0}^{x=\pi} \right) dy\,dz =$$



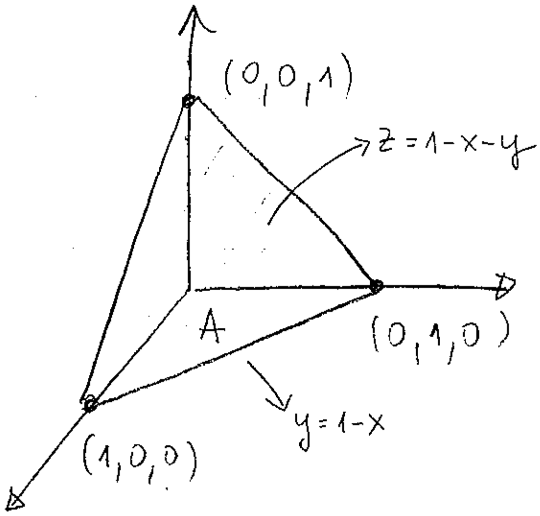
$$= \iint_{[0,\pi]\times[0,1]} z(\cos y + \cos y)\, dy\,dz =$$

$\cos(\pi + y) =$
$= \cos\pi \cos y - \operatorname{sen}\pi \operatorname{sen} y =$
$= -\cos y$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\pi} 2z\cos y\, dy \right) dz = \int_0^1 2z \left(+\operatorname{sen} y \Big|_{y=0}^{y=\pi} \right) dz = 0$$

ESEMPIO 2

Calcolare $\int_T y\,dx\,dy\,dz$, dove T e' il tetraedro con vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.



Ris:
vediamo innanzi tutto come descrivere T, che e' il tetraedro limitato dai tre piani coordinati ed il piano passante per i punti $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$. Calcoliamo l'equazione di tale piano; sia essa $ax+by+cz=d$. Deve essere $a=d$, $b=d$, $c=d$ e quindi l'equazione e' $x+y+z=1$,

cioè $z = 1 - x - y$.

Sia A la faccia del tetraedro sul piano $z=0$.
Avremo

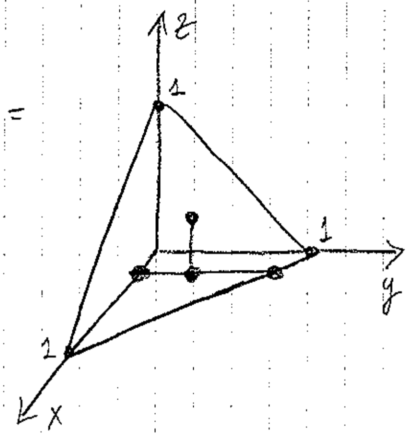
$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; (x,y) \in A , 0 \le z \le 1-x-y\}$$

Resta da descrivere A; poiché la retta passante per $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ ha equazione $y = 1-x$, avremo che $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 , 0 \le y \le 1-x\}$.
In definitiva

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x, 0 \le z \le 1-x-y\}$$

Quindi

$$\int_T y \, dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} y \, dz \right) dy \right) dx =$$



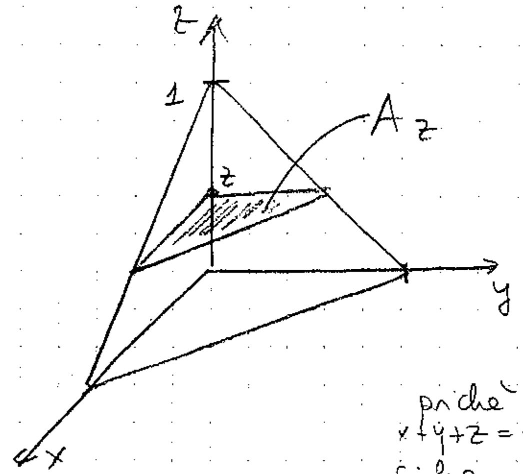
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \Big[yz \Big]_{z=0}^{z=1-x-y} dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (y - xy - y^2)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2}(1-x) - \frac{y^3}{3} \Big|_{y=0}^{y=1-x} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{(1-x)^3}{2} - \frac{(1-x)^3}{3} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{6}(1-x)^3 \, dx = -\frac{1}{24}(1-x)^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{24}$$

Osserviamo che si poteva descrivere T anche in un altro modo, usando il teorema di Fubini diversamente. E cioè

$$\int_T y\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_{A_z} y\,dx\,dy \right) dz$$

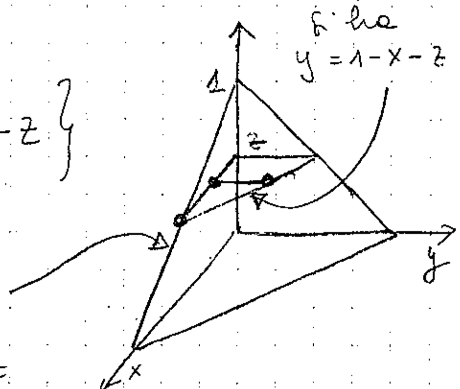


dove A_z è la fetta orizzontale del tetraedro ad altezza z (vedi fig.)

Bisogna quindi descrivere A_z.

$$A_z = \{(x,y,z):\ 0 \le x \le 1-z\ ,\ 0 \le y \le 1-x-z\}$$

poiché $x+y+z=1$ si ha $y=1-x-z$



In definitiva

poiché $x+y+z=1$, si ha $x=1-y-z$ e per $y=0$ si ha la retta $x=1-z$

$$\int_T y\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} \left(\int_0^{1-x-z} y\,dy \right) dx \right) dz =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} \left(\frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=1-x-z} \right) dx \right) dz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} \frac{(1-x-z)^2}{2}\,dx \right) dz =$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{(1-x-z)^3}{6} \Big|_{x=0}^{x=1-z} \right) dz = \int_0^1 \frac{(1-z)^3}{6}\,dz = -\frac{(1-z)^4}{24} \Big|_0^1 = \frac{1}{24}$$

OSSERVAZIONE

Poiché
$$\iiint_D dx\,dy\,dz = \text{volume di } E,$$

tecniche di integrazione in tre variabili possono essere d'aiuto nel calcolo di volumi di solidi. Vedremo tra poco, come esempio, calcolo di volumi di solidi di rotazione

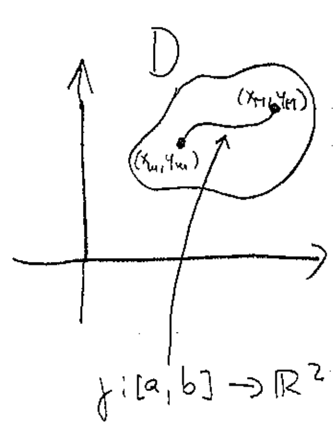
Prima di vedere tali esempi e la formula di cambio di variabile in integrali multipli, diamo il teorema della media integrale per funzioni di più variabili

TEOREMA della MEDIA INTEGRALE

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ chiuso limitato, connesso e misurabile
$f : D \to \mathbb{R}$ continua
$\Rightarrow$ $\exists\, (\xi, \eta) \in D$ tale che
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(\xi,\eta)\,|D|$$

dim:
Supp. $|D| > 0$, altrimenti il risultato è banale.
Sia $m = \min_D f$, $M = \max_D f$; siano (x_m, y_m) e $(x_M, y_M) \in D$ t.c. $f(x_m, y_m) = m$, $f(x_M, y_M) = M$. Poiché D è connesso $\exists\, \underset{\text{continua}}{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ t.c. $\gamma(t) \in D$ $\forall t \in [a,b]$, $\gamma(a) = (x_m, y_m)$ e $\gamma(b) = (x_M, y_M)$. Si ha

$$m \cdot |D| \le \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \le M|D|,$$



cioè

$$m \le \frac{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}{|D|} \le M$$

la funzione composta $f \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua in quanto composizione di continue ed inoltre

$$f(\gamma(a)) = f(x_m, y_m) = m$$
$$f(\gamma(b)) = f(x_M, y_M) = M$$

e quindi (teorema degli zeri delle funzioni continue), esiste $\tau \in [a,b]$ t.c.

$$(f \circ \gamma)(\tau) = \frac{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}{|D|} \qquad (*)$$

Poiché si ha $\gamma(\tau) = (\xi, \eta) \in D$, (*) si può scrivere come

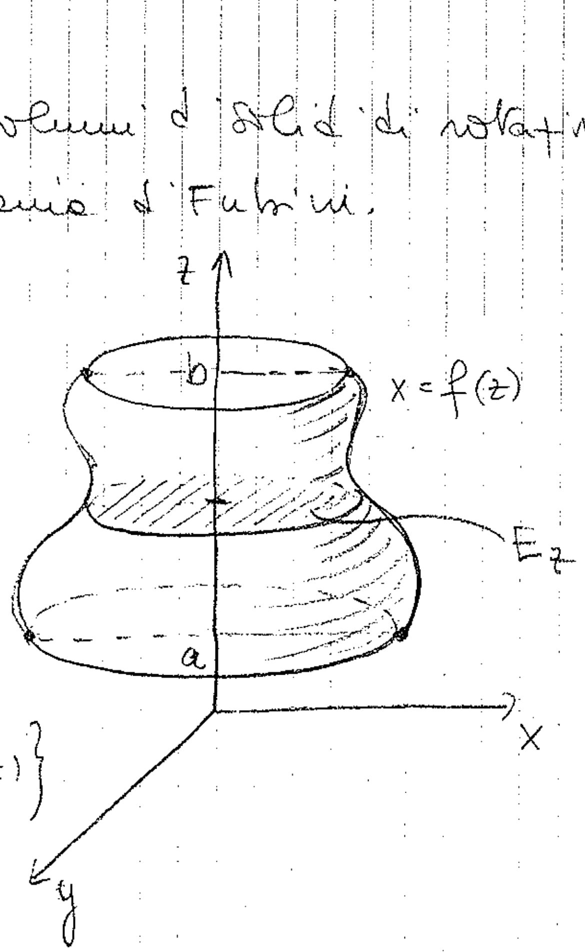
$$f(\xi,\eta) = \frac{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}{|D|},$$

che è la tesi cercata

#

DUE CASI PARTICOLARI

Vediamo delle formule per volumi di solidi di rotazione, facilmente ottenute con il teorema di Fubini.



1) Sia E come in figura

$f(z)$ una funzione definita per $a \le z \le b$, $f \geq 0$.

$$E = \{(x,y,z) : a \le z \le b \,,\; x^2+y^2 \le f^2(z)\}$$

Se chiamiamo

$E_z = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le f^2(z)\}$ il disco di raggio $f(z)$ che si ottiene intersecando E con il piano orizzontale passante per $(0,0,z)$, dal teorema di Fubini abbiamo

$$\text{volume}(E) = \iiint_E dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\iint_{E_z} dx\,dy \right) dz =$$

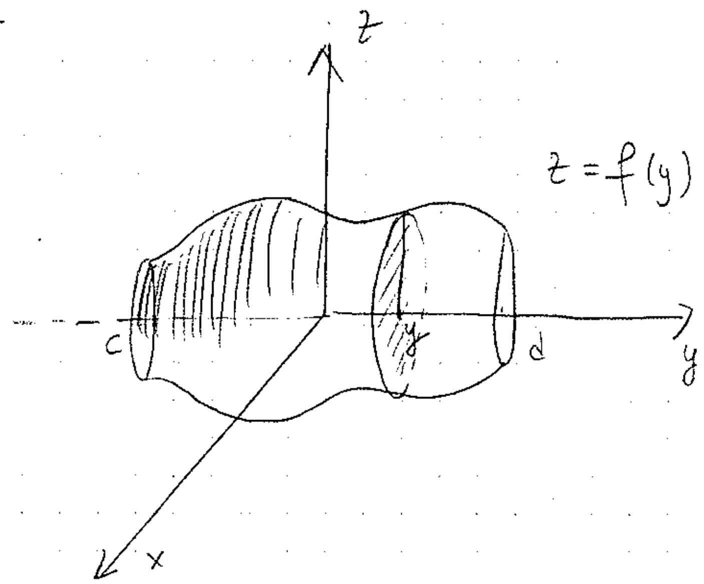
$$= \int_a^b \text{area}(E_z)\, dz = \int_a^b \pi f^2(z)\, dz = \pi \int_a^b f^2(z)\, dz \,,\text{ cioè}$$

$$\boxed{\text{volume}(E) = \pi \int_a^b f^2(z)\, dz}$$

; analogamente

2) Sia E come in figura

$f(y)$ una funzione definita per $c \leq y \leq d$, $f \geq 0$



$E = \{(x,y,z) : c \leq y \leq d, \; x^2+z^2 \leq f^2(y)\}$

Se chiamiamo $E_y = \{(x,y,z) : x^2+z^2 \leq f^2(y)\}$ il disco di raggio $f(y)$ che si ottiene intersecando E con il piano verticale passante per $(0,y,0)$, dal teorema di Fubini abbiamo

$$\text{volume}(E) = \iiint_E dx\,dy\,dz = \int_c^d \left(\iint_{E_y} dx\,dz \right) dy =$$

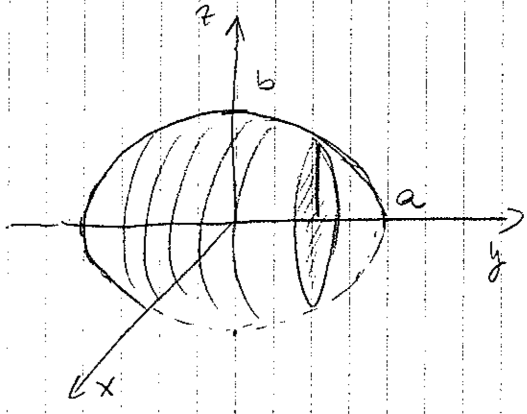
$$= \int_c^d \text{area}(E_y)\,dy = \int_c^d \pi f^2(y)\,dy \qquad , \text{cioè}$$

$$\text{volume}(E) = \pi \int_c^d f^2(y)\,dy$$

. Ad esempio

calcoliamo il volume del solido che si ottiene ruotando la metà superiore dell'ellisse

$$\frac{z^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$



attorno all'asse y ; si ha

$$z=f(y)=\sqrt{b^2\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-y^2}$$

e quindi $\text{Volume}(E)=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-y^2)\,dy$

$$=\pi\frac{b^2}{a^2}\left(ya^2-\frac{y^3}{3}\Big|_{-a}^{a}\right)=\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^3-\frac{a^3}{3}+a^3-\frac{a^3}{3}\right)=$$

$$=\pi\frac{b^2}{a^2}\,\frac{4}{3}a^3=\frac{4}{3}\pi a b^2$$

CAMBIO DI VARIABILI negli integrali multipli

Rimembranze:

$V=(v_1, v_2, v_3)$, $W=(w_1, w_2, w_3)$ vettori in $\mathbb{R}^3$.

Il vettore definito da

$$V \times W = \left(\det\begin{pmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}\right)$$

si chiama <u>prodotto vettoriale</u> tra V e W

Osserviamo subito che il prodotto vettoriale non commuta, infatti $V \times W = -(W \times V)$. Inoltre

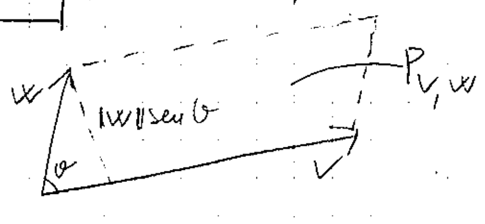
$$(V \times W) \circ V = v_1 \det\begin{pmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{pmatrix} - v_2 \det\begin{pmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{pmatrix} + v_3 \det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = 0$$

cioè $V \times W \perp V$ (e analogamente $V \times W \perp W$)

(come regola mnemonica si può scrivere facilmente $V \times W = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$)

Si ha anche che $\boxed{\|V \times W\| = \text{area } P_{V,W}}$ (*), dove $P_{V,W}$ è il parallelogramma determinato da V e W. Infatti



$$\text{area}(P_{V,W}) = \|V\| \|W\| \operatorname{sen}\theta = \|V\| \|W\| (1 - \cos^2\theta) =$$

$$= \|V\|^2\|W\|^2\left(1 - \frac{(V\circ W)^2}{\|V\|^2\|W\|^2}\right) = \|V\|^2\|W\|^2 - (V\circ W)^2 =$$

$$= (v_1^2+v_2^2+v_3^2)(w_1^2+w_2^2+w_3^2) - (v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3)^2 =$$

$$= v_1^2(w_2^2+w_3^2) + v_2^2(w_1^2+w_3^2) + v_3^2(w_1^2+w_2^2) - 2(v_1w_1v_2w_2 + v_1w_1v_3w_3 + v_2w_2v_3w_3)$$

$$= (v_2w_3 - v_3w_2)^2 + (v_3v_1 - v_1w_3)^2 + (v_1w_2 - v_2w_1)^2 = \| V \times W \|$$

<u>OSS</u>: dalla formula (*) della pagina precedente segue che

$$V, W \text{ linearmente indipendenti} \iff V\times W \neq (0,0,0)$$

[Riassumendo, a partire da V e W si può definire un nuovo vettore $V\times W$, ortogonale ad essi, la cui lunghezza è l'area del parallelogramma da essi individuato]

—

Veniamo adesso al cambio di variabili:

Consideriamo $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

e consideriamo una trasformazione $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

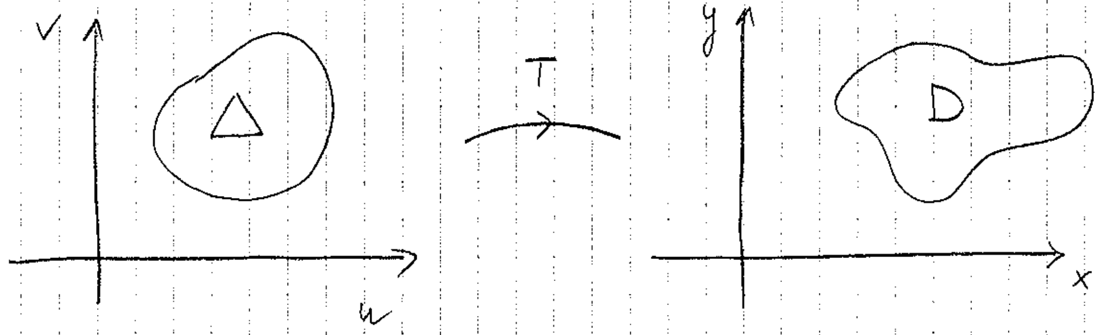
con $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$ continue. Supponiamo che T trasformi in modo biunivoco una regione Δ del piano u,v nella regione D del piano x,y.

Supponiamo inoltre che lo jacobiano

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

abbia determinante diverso da zero in ogni punto di Δ.

(garantisce l'invertibilità locale)

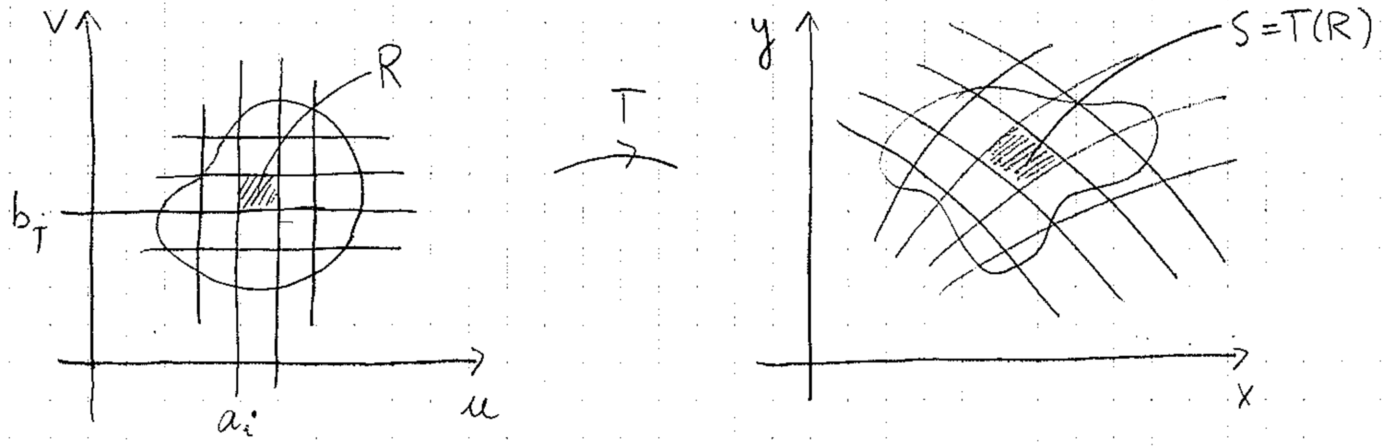


Se P è una partizione di Δ in mattoncini R determinate dalle rette $u = a_i$ $a_1 < a_2 < \dots < a_n$

$v = b_j$ $b_1 < b_2 < \dots < b_m$,

allora le curve $\begin{cases} x = x(a_i, v) & i = 1, \dots, n \\ y = y(u, b_j) & j = 1, \dots, m \end{cases}$ determinano

una partizione P' di D in mattoncini $S = T(R)$



Ricordando le somme di Riemann, possiamo scrivere

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \simeq \sum_S f(x_S,y_S)\,|S| = \sum_R f(x_S,y_S)\,|T(R)| =$$

$$= \sum_R f(x(u_R,v_R),\, y(u_R,v_R))\,|T(R)| \,,$$

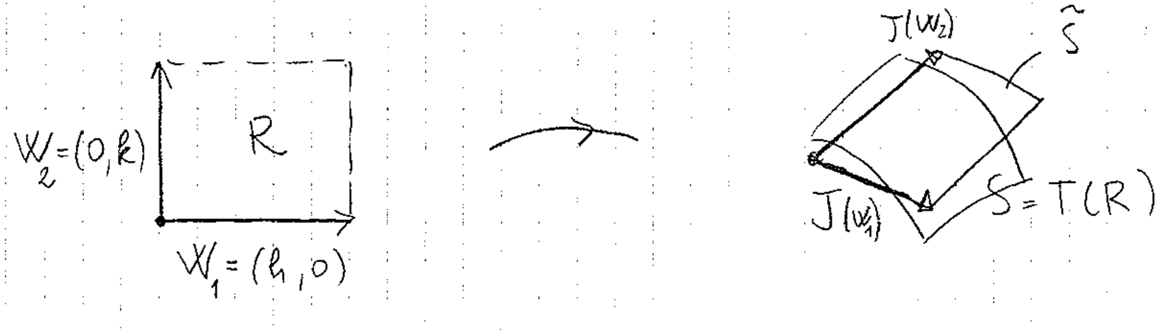
dove $(x_S,y_S) \in S$ $\forall\, S$ e $(u_R,v_R) \in R$ è tale che $T(u_R,v_R) = (x_S,y_S)$. Si tratta ora di esprimere $|T(R)|$ in modo opportuno in termini di u,v.

Posto

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_R,v_R) \,,$$

matrice costruita con i vettori tangenti alle curve che delimitano S

l'area $S=T(R)$ sarà approssimata dal parallelogramma $\tilde{S}$ determinato dai vettori $J(W_1)$, $J(W_2)$



cioè

$$|T(R)| \simeq |\tilde{S}| \,;$$

l'errore nell'approssimazione si può dimostrare essere trascurabile in confronto a $|T(R)|$ quando $h,k \to 0$.

Ora

$$J(W_1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \cdot h \\ \frac{\partial y}{\partial u} \cdot h \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix}$$

$$J(W_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \cdot k \\ \frac{\partial y}{\partial v} \cdot k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Quindi, ricordando quanto detto sul prodotto vettore, si ha

$$|\tilde{S}| = \| J(W_1) \times J(W_2) \| = \left\| \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u} h & \frac{\partial y}{\partial u} h & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} k & \frac{\partial y}{\partial v} k & 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \left(0, 0, hk \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) \right\| =$$

$$= hk \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \quad , \text{cioè}$$

$$|T(R)| \approx |\tilde{S}| = hk \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_R, v_R) \right| =$$

$$= |R| \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_R, v_R) \right| .$$

Ritornando all'integrale si ha quindi

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \approx \sum_R f(x(u_R,v_R), y(u_R,v_R)) \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_R,v_R) \right| |R|$$

somme di Riemann

$$\approx \iint_\Delta f(x(u,v), y(u,v)) \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

Accettando che quando la norma di $\mathcal{P}$ tende a zero i segni "$\approx$" diventino "$=$" (questo è il punto del costo della dimostrazione, che tralasciamo), si ottiene la formula del cambio di variabili negli integrali doppi

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f(x(u,v),y(u,v))\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv}$$

Per trasformare questo ragionamento molto semplice in una vera dimostrazione, bisognerebbe dimostrare che quando h e k tendono a zero (e quindi i mattoncini diventano sempre più piccoli, ma il loro numero tende all'infinito) tutti i segni "$\approx$" diventano "$=$".
Il problema principale che si incontra nello svolgere tale programma è il seguente: facendo diventare i rettangolini R sempre più piccoli, l'errore nell'approssimare l'area di $S = T(R)$ con $\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \cdot \text{area}(R)$ tenderà a zero, ma contemporaneamente il numero di mattoncini (e di conseguenza il numero di errori) tenderà a $+\infty$. Per fare una dimostrazione precisa bisognerebbe dimostrare che al limite il risultato di questo conflitto è nullo, cioè la velocità con cui gli errori vanno a zero è superiore alla velocità con cui il numero di mattoncini tende a $+\infty$.

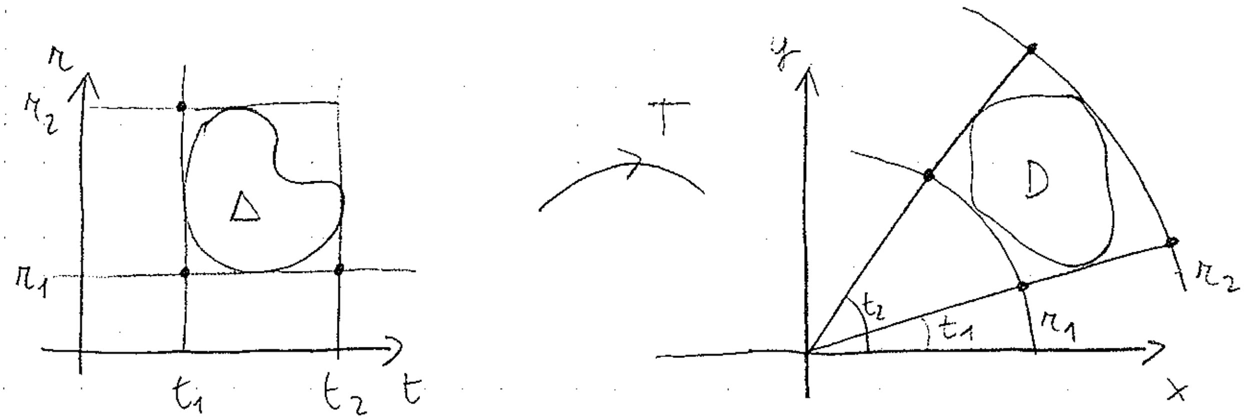
Facciamo un conto preciso nel caso di coordinate polari.

In questo caso T è data da

$$\begin{cases} x = x(r,\vartheta) = r\cos t \\ y = y(r,\vartheta) = r\,\text{sen}\, t \end{cases} ; \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -r\,\text{sen}\, t \\ \text{sen}\, t & r\cos t \end{pmatrix}$$

e quindi $\left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,t)} \right| = r$.

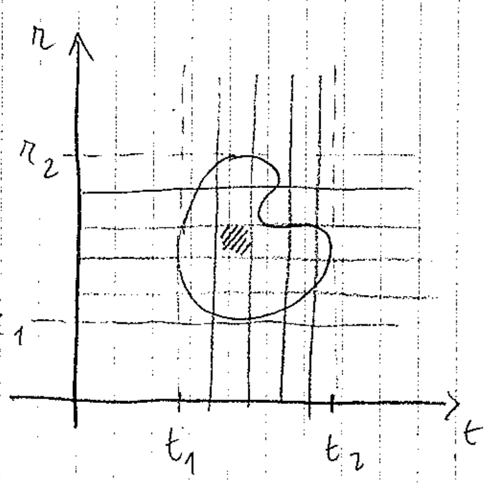
Consideriamo la situazione in figura

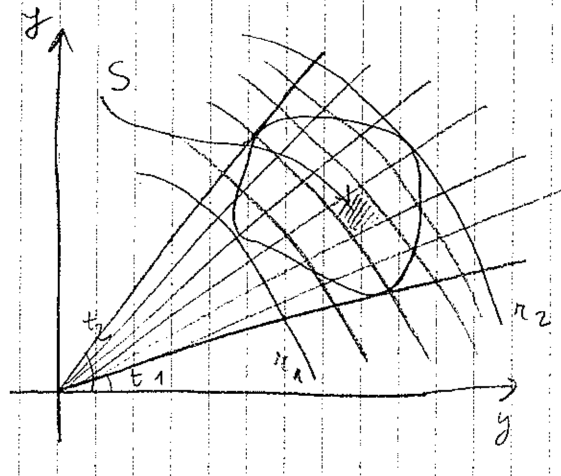


Se $\Delta \subset [t_1,t_2]\times[r_1,r_2]$, D sarà contenuto nel settore indicato nella figura a destra.
Vogliamo trovare una formula di calcolo per

$$|D| = \iint_D dx\,dy \; .$$

Dividendo $[r_1,r_2]$ e $[t_1,t_2]$ ognuno in n intervallini uguali si ottiene una mattonatura di D in al più n^2 mattoncini S (vedi la figura nella pagina successiva).
E' chiaro che $|D| \approx \sum_{S\subset D} |S|$

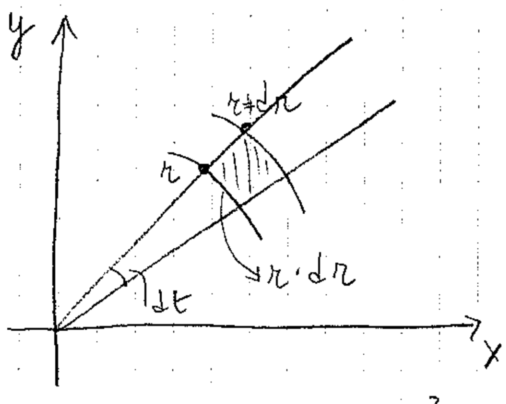




le somme $\sum_{S\subset D}$ area S approssimeranno (per difetto) l'area di D quando $n\to+\infty$. Per calcolare

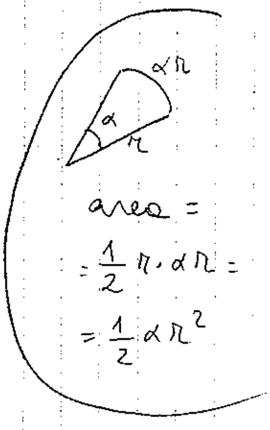
$$\lim_n \sum_{S\subset D} |S| ,$$

calcoliamo innanzitutto l'area di ogni mattone S interno a D; si ha



$$|S| = \frac{dt}{2}\left[(r+dr)^2 - r^2\right] =$$

$$= r\,dr\,dt + \frac{dt}{2}(dr)^2$$



Poiché il numero di mattoni cui non supera n^2 e poiché $dt = \frac{t_2-t_1}{n}$, $dr = \frac{r_2-r_1}{n}$ e quindi $\frac{dt}{2}(dr)^2 = \frac{t_2-t_1}{2n}\cdot\frac{(r_2-r_1)^2}{n^2} = cost \cdot \frac{1}{n^3}$, risulta

$$\lim_n \sum_{S\subset D} \frac{dt}{2}(dr)^2 \le \lim_n n^2 \frac{cost}{n^3} = 0 .$$ Quindi

$$|D| = \lim_n \sum_{S\subset D} |S| = \lim_n \sum_{S\subset D} r\,dr\,dt .$$

Pertanto, ricordando la definizione d'integrale, risulta

$$\boxed{|D| = \int_{\Delta} r\,dr\,dt}$$

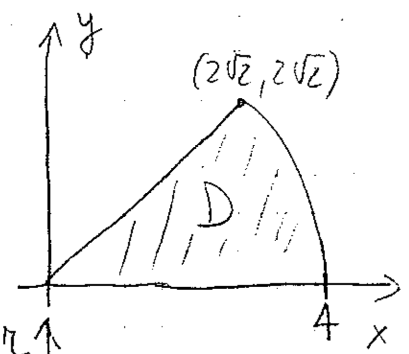
Ragionando in modo del tutto analogo è facile convincersi che, se $f: D \to \mathbb{R}$ è integrabile, allora

$$\boxed{\int_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\Delta} f(r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,t)\, r\,dr\,dt}$$

Notiamo che il fattore r che compare nel secondo membro è il determinante dello jacobiano $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,t)}$. La facilità con cui si sono ottenute le due formule sopra dipende dal fatto che il cambio di variabile $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$ trasforma rettangoli nel piano t, r in insieme di cui è molto facile calcolare l'area

<ins>ESEMPIO 1</ins>

Calcolare $\iint_D xy\,dx\,dy$, dove D è la regione in figura



Ris:

$$\iint_D xy\,dx\,dy = \iint_{\Delta} r\cos t\, r\,\mathrm{sen}\,t\; r\,dr\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi/4}\left(\int_0^4 r^3\,\mathrm{sen}\,t\cos t\,dr\right)dt = \int_0^{\pi/4}\left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^4 \mathrm{sen}\,t\cos t\right)dt =$$