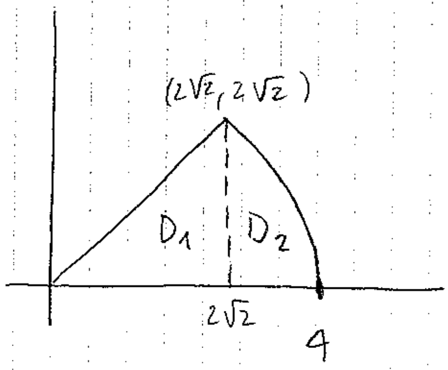
$$= 64 \int_0^{\pi/4} \cos t \,\text{sen}\, t \, dt = 64 \left. \frac{\text{sen}^2 t}{2} \right|_0^{\pi/4} = 64 \cdot \frac{1}{4} = 16$$

Anche se in questo momento stiamo parlando di cambio di variabili, per esercizio calcoliamo l'integrale anche usando il teorema di Fubini:



Facciamolo scomponendo D in due domini normali rispetto all'asse y (si poteva anche vedere D come dominio normale rispetto all'asse x).

$D = D_1 \cup D_2$, dove

$$D_1 = \{(x,y) : 0 \le x \le 2\sqrt{2},\ 0 \le y \le x\}$$

$$D_2 = \{(x,y) : 2\sqrt{2} \le x \le 4,\ 0 \le y \le \sqrt{16-x^2}\}.$$ Si ha

$$\iint_D xy\,dx\,dy = \iint_{D_1} xy\,dx\,dy + \iint_{D_2} xy\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^{2\sqrt{2}} \left(\int_0^x xy\,dy \right) dx + \int_{2\sqrt{2}}^4 \left(\int_0^{\sqrt{16-x^2}} xy\,dy \right) dx =$$

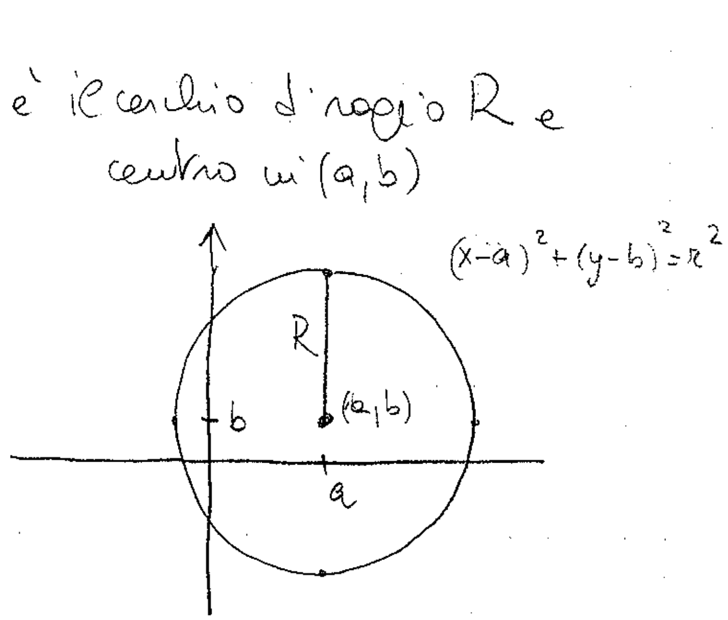
$$= \int_0^{2\sqrt{2}} x \left. \frac{y^2}{2} \right|_{y=0}^{y=x} dx + \int_{2\sqrt{2}}^4 x \left. \frac{y^2}{2} \right|_{y=0}^{y=\sqrt{16-x^2}} dx = \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^3}{2} dx + \int_{2\sqrt{2}}^4 \frac{x}{2}(16-x^2)\,dx =$$

$$= \left. \frac{x^4}{8} \right|_0^{2\sqrt{2}} + 8 \left. \frac{x^2}{2} \right|_{2\sqrt{2}}^4 - \left. \frac{x^4}{8} \right|_{2\sqrt{2}}^4 = 8 + 64 - 32 - 32 + 8 = 16$$

ESEMPIO 2

Calcolare $\iint_D xy^2\,dx\,dy$, dove D è il cerchio di raggio R e centro in (a,b)

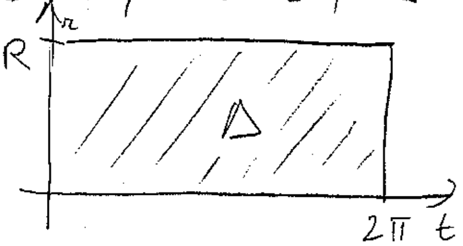
Ris:



usiamo il cambio di variabile

$$\begin{cases} x = a + r\cos t \\ y = b + r\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$$

Le coordinate t, r descrivono D quando $0 \le r \le R$ e $0 \le t \le 2\pi$ (quindi Δ è il rettangolo $[0,2\pi]\times[0,R]$



)

Risulta

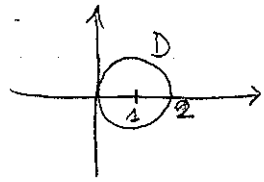
$$\iint_D xy^2\,dx\,dy = \iint_\Delta (a+r\cos t)(b+r\,\mathrm{sen}\,t)^2\, r\,dr\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \left[ab^2 + rb^2\cos t + ar^2\,\mathrm{sen}\,t + r^3\cos t\,\mathrm{sen}^2 t + 2abr\,\mathrm{sen}\,t + 2br^2\,\mathrm{sen}\,t\cos t\right] dr\right) dt \quad \text{ecc. ecc.}$$

Se avessi usato le polari $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$, come avrei potuto descrivere $B_R(a,b)$? Vediamolo con esempio piuttosto istruttivo.

ESEMPIO 3

Supponiamo di dover calcolare $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$



dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 2x\}$.

Il dominio e' il cerchio di raggio 1 e centro $(1,0)$, infatti

$$x^2+y^2\le 2x \iff x^2-2x+y^2\le 0 \iff (x-1)^2+y^2\le 1$$

Qui si pone il problema che l'integrando sarebbe molto semplice usando le polari $\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\,\text{sen}\, t\end{cases}$ (infatti $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{r^2\cos^2 t+r^2\,\text{sen}^2 t}=r$, mentre il dominio sarebbe molto semplice usando il cambio di variabile visto prima

$$\begin{cases} x=1+r\cos t \\ y=r\,\text{sen}\, t\end{cases}$$

(infatti in termini di r e t il dominio si descrive con $0\le r\le 1$ e $0\le t\le 2\pi$)

Qui c'è un conflitto e bisogna vedere che cosa sia più conveniente. Se scegliamo il cambio di variabile che semplifica maggiormente il dominio, cioè $\begin{cases} x=1+r\cos t \\ y=r\,\text{sen}\, t\end{cases}$, l'integrale diventa

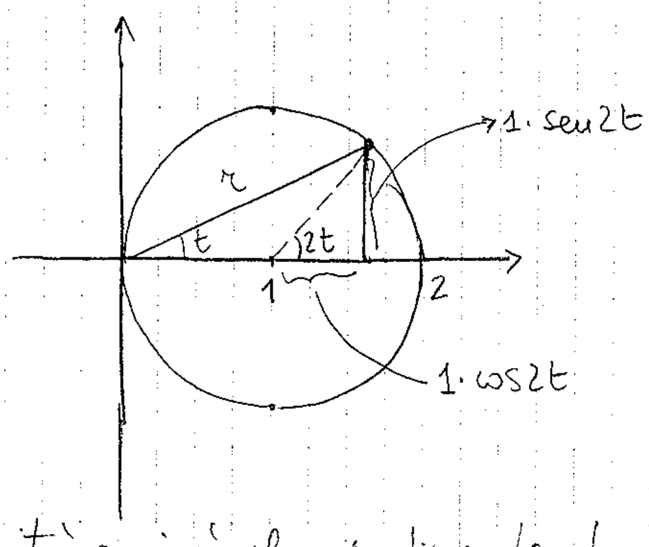
$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{(1+r\cos t)^2+r^2\,\text{sen}^2 t}\cdot \boxed{r}\,dr\right)dt =$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{1+r^2+2r\cos t}\cdot r\,dr\right)dt$$

, che non ha un aspetto rassicurante. Vogliamo allora

Proviamo a descrivere D usando il cambio di variabile che semplifica maggiormente l'integrando, cioè $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$, in modo da avere

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_\Delta r\cdot\boxed{r}\,dr\,dt = \iint_\Delta r^2\,dr\,dt$$



(l'angolo al centro è doppio rispetto all'angolo alla circonferenza)

La novità qui è che r dipende da t.

Possiamo trovare Δ analiticamente o graficamente

<u>analiticamente</u>: $x^2+y^2 \le 2x \iff r^2\cos^2 t + r^2\,\mathrm{sen}^2 t \le 2r\cos t$

$$\iff r^2 \le 2r\cos t \iff r \le 2\cos t$$

Quindi deve essere $\cos t \ge 0$ ed $0 \le r \le 2\cos t$: in definitiva

$$\Delta = \left\{ (r,t) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 2\cos t \right\}$$

<u>graficamente</u>: si ha $r^2 = (1+\cos(2t))^2 + \mathrm{sen}^2(2t)$, cioè
(vedi figura)

$$r^2 = 1 + \cos^2(2t) + 2\cos(2t) + \mathrm{sen}^2(2t) = 2 + 2\cos(2t) =$$

$$= 2 + 2(2\cos^2 t - 1) = 4\cos^2 t \Rightarrow r = 2\cos t$$

quindi deve essere $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le r \le 2\cos t$, come visto analiticamente.

L'integrale quindi diventa

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos t} r^2\,dr \right) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^3}{3} \Big|_{r=0}^{r=2\cos t} \right) dt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3} \cos^3 t\, dt$$, che ha un aspetto rassicurante, infatti:

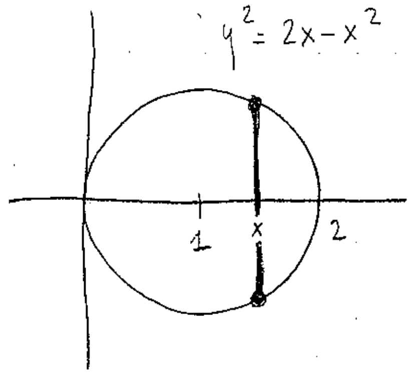
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3}\cos^3 t\,dt = \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\operatorname{sen}^2 t)\cos t\,dt = \frac{8}{3}\int_{-1}^{1} (1-s^2)\,ds =$$

$\operatorname{sen} t = s$
$\cos t\,dt = ds$

$$= \frac{8}{3}\left(s - \frac{s^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{9}$$

Avremmo potuto pensare a calcolare l'integrale con Fubini lasciando le coordinate cartesiane, ma non sarebbe stato una buona idea.....

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy \right) dx =$$



$= \text{ecc. ecc}$

<u>OSS</u> se il dominio è l'interno dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ una buona descrizione in polari è $\begin{cases} x = r\,a\cos t \\ y = r\,b\operatorname{sen} t \end{cases}$ $\begin{matrix} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le t \le 2\pi \end{matrix}$

NOTA IMPORTANTE

Sia $T: \Delta \to D$

$$(u,v) \mapsto T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$$

la trasformazione con cui abbiamo fatto il cambio di variabili negli integrali doppi. Spesso capita di impostare il cambio con la trasformazione inversa

$$T^{-1}: D \to \Delta \quad \text{del tipo} \quad \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

e di conseguenza di aver bisogno di sapere quant'è

$$\left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| ,$$

senza avere la trasformazione T esplicitamente.

Facciamo un esempio pratico. Supponiamo di dover calcolare

$$I = \iint_D \operatorname{sen}(x+y)\, e^{x-y}\, dx\, dy \; ;$$

viene spontaneo il cambio di variabili $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ ed ottenere così

$$I = \iint_\Delta \operatorname{sen} u \cdot e^{v} \cdot \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\, dv \, .$$

Resta da calcolare $\left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|$, ma non abbiamo esplicitamente la trasformazione $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$.

In questo caso specifico la cosa è banale, poichè da

$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$, sommando e sottraendo le equazioni, si trova

subito che $\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$ e quindi $\left|\det \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}$.

Non sempre però è così semplice esplicitare x ed y in funzione di u e v (a volte è impossibile); ci viene in aiuto un risultato, che non dimostreremo, che ci permette di evitare questo passaggio e cioè il fatto che

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\det \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

(Nell'esempio precedente

$$\left|\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \left|\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right| = |-2| = 2,$$

da cui $\left|\det \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \dfrac{1}{2}$, come già trovato)

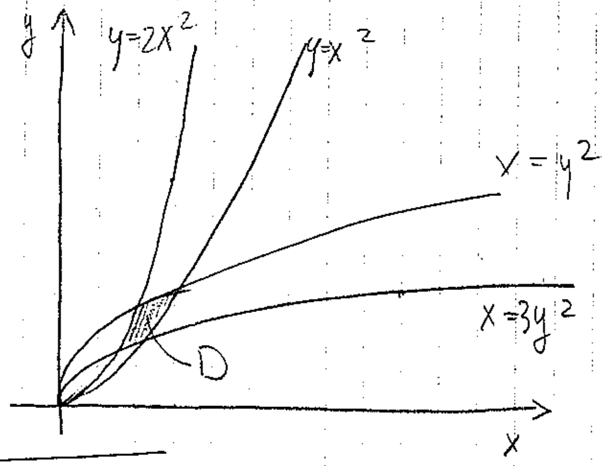
In generale, poichè $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ si scrive in termini di x ed y, resta il problema di scrivere $\dfrac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$ in termini di u e v,

ESEMPIO

Calcolare l'area A della regione piana finita delimitata dalle quattro parabole $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$, $x = 3y^2$.

Ris:

poniamo $\begin{cases} u = \dfrac{y}{x^2} \\ v = \dfrac{x}{y^2} \end{cases}$;



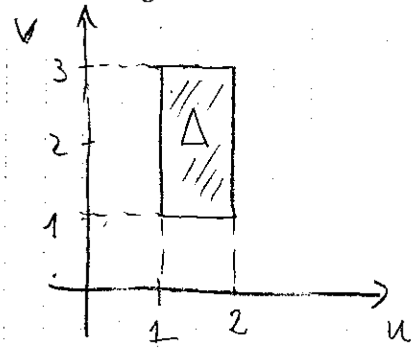
si ottiene

$$\Delta = \{(u,v) : 1 \le u \le 2,\ 1 \le v \le 3\}$$

IDEA :

$x^2 \le y \le 2x^2$; $y^2 \le x \le 3y^2$

$1 \le \underbrace{\dfrac{y}{x^2}}_{u} \le 2 \qquad 1 \le \underbrace{\dfrac{x}{y^2}}_{v} \le 3$



Ora

$$\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det \begin{pmatrix} -2\dfrac{y}{x^3} & \dfrac{1}{x^2} \\ \dfrac{1}{y^2} & -2\dfrac{x}{y^3} \end{pmatrix} = +4\frac{1}{x^2y^2} - \frac{1}{x^2y^2} = \frac{3}{x^2y^2}$$

e quindi $\det \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{x^2y^2}{3}$. Resta scriverlo in termini di u e v. Si ha $\dfrac{x^2y^2}{3} = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{x^4}{y^2}\cdot\dfrac{y^4}{x^2} = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{1}{u^2}\,\dfrac{1}{v^2} = \dfrac{1}{3u^2v^2}$. Quindi

$$A = \iint_D dx\,dy = \iint_\Delta \frac{1}{3u^2v^2}\,du\,dv = \int_1^3 \left(\int_1^2 \frac{1}{3v^2u^2}\,du \right) dv = \frac{1}{9}$$

ANCORA SUGLI INTEGRALI DI FUNZIONI DI TRE VARIABILI

In maniera del tutto analoga al caso di due variabili si può dimostrare la formula di cambio di variabili per integrali in $\mathbb{R}^3$. Sia

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u,v,w) \longmapsto T(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$$

una trasformazione biunivoca tra Δ e D con

$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial w}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial w}$ continue e

$$\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0$$

dove
$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

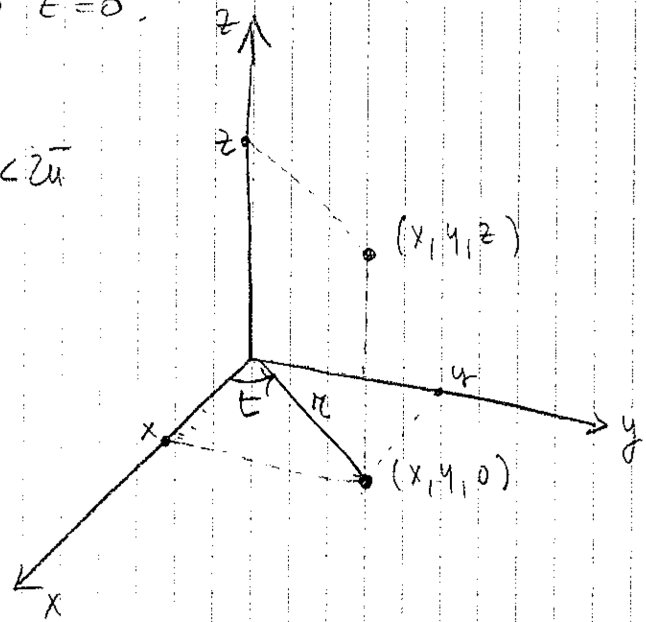
Allora

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Delta f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left|\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw}$$

Introduciamo ora due particolari cambi di variabile in $\mathbb{R}^3$ che possono essere particolarmente utili nel calcolo di integrali tripli

COORDINATE CILINDRICHE

Questo sistema di coordinate usa le coordinate polari del piano x, y, mentre mantiene la terza coordinata z per misurare la distanza tra il punto in considerazione e la sua proiezione sul piano $z=0$.



$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r \operatorname{sen} t \\ z = z \end{cases} \qquad r>0 \;, \; 0<\theta<2\pi$$

In questo caso

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_\Delta f(r\cos t, r\operatorname{sen} t, z)\, r\, dr\, dt\, dz \qquad , \text{ infatti}$$

$$\left| \det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,t,z)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos t & -r\operatorname{sen} t & 0 \\ \operatorname{sen} t & r\cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \left| r\cos^2 t + r\operatorname{sen}^2 t \right| = r$$

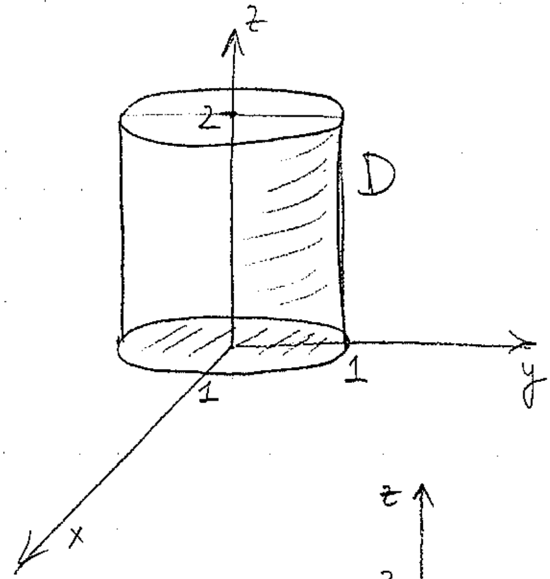
ESEMPIO

Calcolare $I = \iiint_D (x^2+y^2-z)\,dx\,dy\,dz$,

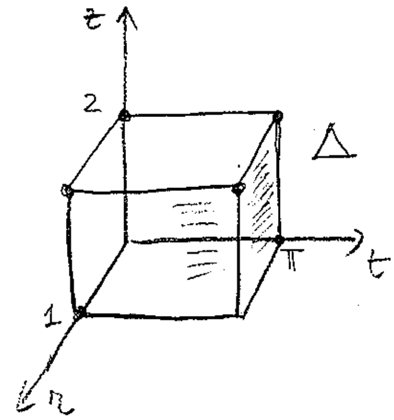
dove D è il cilindro di base $B_1(0,0)$ $\subset \{z=0\}$ ed altezza 2.

Risol:

in coordinate cilindriche il cilindro D è il trasformato di



$$\Delta = \{(r,t,z) \in \mathbb{R}^3,\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le t \le 2\pi,\ 0 \le z \le 2\}$$



e quindi

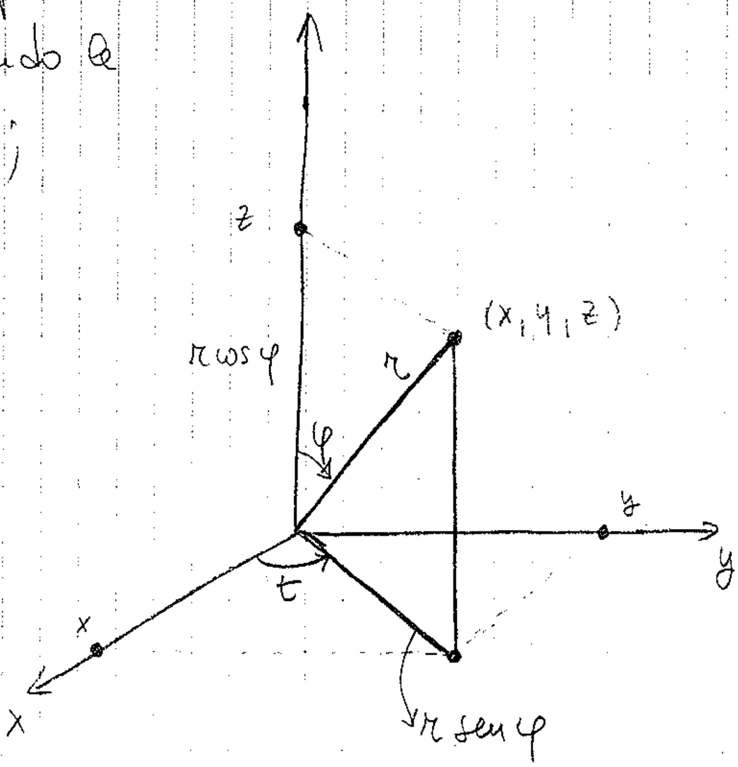
$$I = \iiint_\Delta (r^2\cos^2 t + r^2 \operatorname{sen}^2 t - z)\, r\, dr\, dt\, dz =$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (r^2 - z)\, r\, dr \right) dt \right) dz = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4} - z\frac{r^2}{2} \Big|_{r=0}^{r=1} \right) dt \right) dz =$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} - \frac{z}{2} \right) dt \right) dz = \int_0^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{z}{2} \right) \cdot 2\pi\, dz = \left(\frac{1}{4}z - \frac{z^2}{4} \Big|_0^2 \right) \cdot 2\pi = -\pi$$

COORDINATE SFERICHE

Possiamo determinare un punto (x, y, z) dello spazio considerando le quantità r, φ, t in figura; risulta



$$\begin{cases} x = r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\cos t \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,t \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$r \geq 0$

$0 \leq \varphi \leq \pi$

$0 \leq t \leq 2\pi$

(φ va solo da 0 a π e non da 0 a 2π, perché i punti che verrebbero considerati da π a 2π sono già considerati da t che va da 0 a 2π)

In questo caso

$$\boxed{\iiint_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Delta f(r\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos t, r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,t, r\cos\varphi)\, r^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\; dr\,d\varphi\,dt}$$

infatti $\left| \det \dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, t)} \right| = r^2\,\mathrm{sen}\,\varphi$. Vediamolo

ESEMPIO

Calcolare $I = \iiint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, dove D è la metà superiore della sfera $B_2(0,0,0)$, cioè

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ z \geq 0\}$$

Risol.

In coordinate sferiche l'insieme D si descrive come

$$\Delta = \left\{(r,\varphi,t) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq t \leq 2\pi\right\}$$

e quindi

$$I = \iiint_\Delta (r^2 \operatorname{sen}^2\varphi \cos^2 t + r^2 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}^2 t)\, r^2 \operatorname{sen}\varphi \, dr\, d\varphi\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^2 r^4 \operatorname{sen}^3\varphi \, dr \right) d\varphi \right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\varphi \left.\frac{r^5}{5}\right|_0^2 d\varphi \right) dt = 2\pi \cdot \frac{32}{5} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\varphi \, d\varphi = \frac{128}{15}\pi$$

se non c'è nulla che dipende da t si può fare l'integrale subito

$$\left|\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,t)}\right| =$$

$$= \left|\det \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\varphi\cos t & r\cos\varphi\cos t & -r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}t \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}t & r\cos\varphi\operatorname{sen}t & r\operatorname{sen}\varphi\cos t \\ \cos\varphi & -r\operatorname{sen}\varphi & 0 \end{pmatrix}\right| =$$

$$= \Big|\cos\varphi\left(r^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\cos^2 t + r^2\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}^2 t\right) +$$

$$+ r\operatorname{sen}\varphi\left(r\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2 t + r\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2 t\right)\Big| =$$

$$= \left|\cos\varphi \cdot r^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + r\operatorname{sen}\varphi \cdot r\operatorname{sen}^2\varphi\right| =$$

$$= \left|r^2\operatorname{sen}\varphi\cos^2\varphi + r^2\operatorname{sen}^3\varphi\right| = \left|r^2\operatorname{sen}\varphi(\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi)\right| =$$

$$= \left|r^2\operatorname{sen}\varphi\right| = r^2\operatorname{sen}\varphi$$

$$\downarrow$$

$|\operatorname{sen}\varphi| = \operatorname{sen}\varphi$ perché $\varphi \in [0,\pi]$

BARICENTRO d'un insieme

Definiamo baricentro d'un insieme $E \subset \mathbb{R}^2$ il punto $B = (\bar{x}, \bar{y})$ dato da

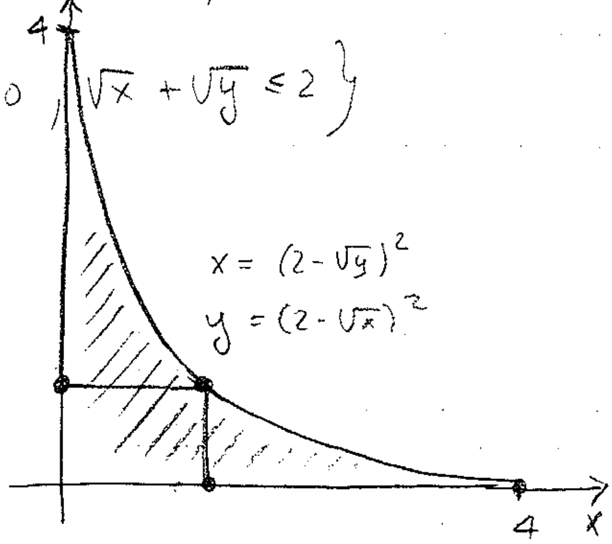
$$\bar{x} = \frac{1}{|E|} \iint_E x \, dx \, dy \quad , \quad \bar{y} = \frac{1}{|E|} \iint_E y \, dx \, dy$$

(Analoga definizione per il baricentro d'un insieme $E \in \mathbb{R}^n$)

ESEMPIO:

Calcolare il baricentro dell'insieme D, dato da

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 2 \}$$



Risol.

$\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 2 \iff \sqrt{y} \leq 2 - \sqrt{x}$

$\iff y \leq (2-\sqrt{x})^2$

$$|D| = \iint_D dx \, dy = \int_0^4 \left(\int_0^{(2-\sqrt{x})^2} dy \right) dx =$$

$$= \int_0^4 (2-\sqrt{x})^2 dx = \int_0^4 (4 + x - 4\sqrt{x}) \, dx = 4x + \frac{x^2}{2} - 4 \frac{x^{3/2}}{3/2} \Big|_0^4 = 16 + 8 - \frac{64}{3} = \frac{8}{3}$$

Ora

$$\bar{x} = \frac{3}{8} \iint_D x \, dx \, dy = \frac{3}{8} \int_0^4 \left(\int_0^{(2-\sqrt{x})^2} x \, dy \right) dx = \frac{3}{8} \int_0^4 x (2-\sqrt{x})^2 dx = \frac{4}{5}$$

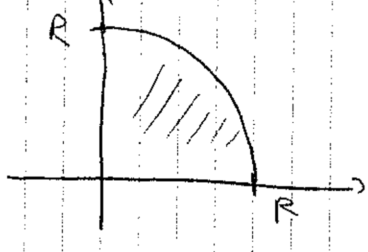
$$\bar{y} = \frac{3}{8} \iint_D y \, dx \, dy = \frac{3}{8} \int_0^4 \left(\int_0^{(2-\sqrt{y})^2} y \, dx \right) dy = \frac{3}{8} \int_0^4 y (2-\sqrt{y})^2 dy = \frac{4}{5} \qquad B = \left(\frac{4}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

Vediamo ora, prima di definire nuovi tipi di integrali, alcuni esercizi di vario genere su ciò che è stato fatto finora.

EX1:

Calcolare $I=\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, dove D è il primo quadrante del cerchio di raggio $R>0$ e centro l'origine

Risol.



$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ y\geq 0,\ y\leq\sqrt{R^2-x^2}\}$

$\Delta=\{(r,t)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq r\leq R,\ 0\leq t\leq\frac{\pi}{2}\}$

Possiamo calcolare I usando coordinate cartesiane o polari.
L'insieme D sembra più semplice in polari ed anche l'integrando sembra più semplice in polari. Quindi:

$$I=\iint_D dx\,dy=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^R \frac{r\cos t+r\,\mathrm{sen}\,t}{r^2}\,\boxed{r}\,dr\right)dt=$$

$$=R\int_0^{\pi/2}(\cos t+\mathrm{sen}\,t)\,dt=R(\mathrm{sen}\,t-\cos t)\Big|_0^{\pi/2}=2R$$

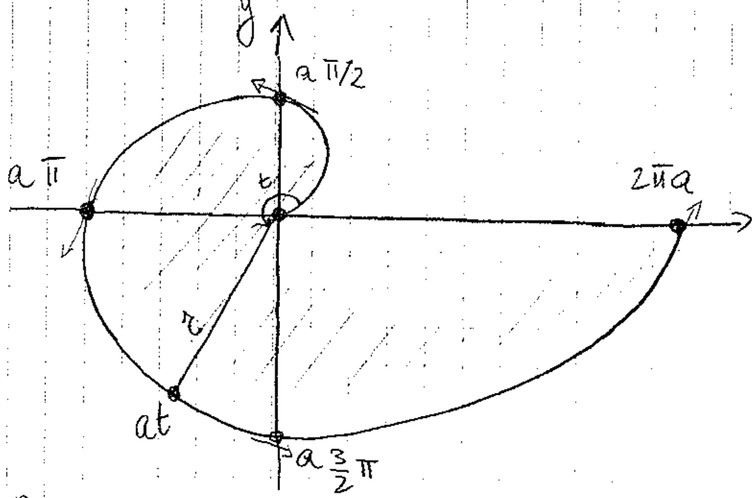
Provando in cartesiane forse è meglio separare $\frac{x+y}{x^2+y^2}$, integrando prima in dy la parte $\frac{x}{x^2+y^2}$ e prima in dx la parte $\frac{y}{x^2+y^2}$ (usando Fubini). Si ottiene

$$I=\int_0^R\left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{x}{x^2+y^2}\,dy\right)dx+\int_0^R\left(\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}\frac{y}{x^2+y^2}\,dx\right)dy=\text{ecc. ecc.}$$

Oppure fare tutto prima in dy e poi in dx! Mah!!

EX 2

Calcolare l'area della regione D indicata in figura



$$\begin{cases} r = a\,t \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

(è l'interno della curva d'equazione $r = a\,t$; parametrizzata sarebbe
$\gamma(t) = (at\cos t, at\,\mathrm{sen}\,t)$, $0 \le t \le 2\pi$

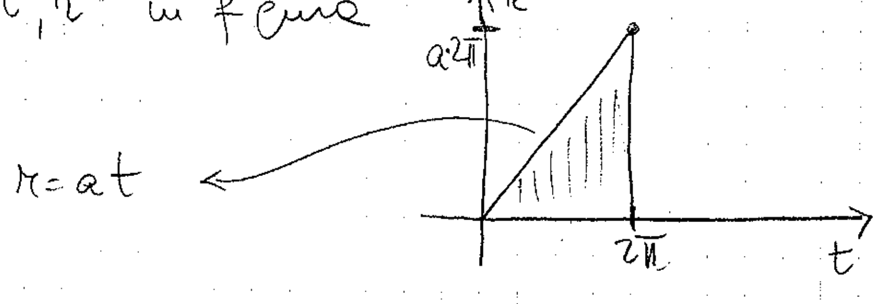
Risol.

Siamo nella situazione in cui sembra buono usare le coordinate polari, tenendo conto che r dipende da t. Si ha

$$|D| = \iint_D dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{at} r\,dr\right)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}\Big|_{r=0}^{r=at}\right)dt = \int_0^{2\pi}\frac{a^2t^2}{2}\,dt = \frac{a^2}{6}t^3\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}a^2\pi^3$$

(NOTA: usare le polari ci ha fatto passare dal dominio D nel piano x, y al dominio Δ nel piano t, r in figura



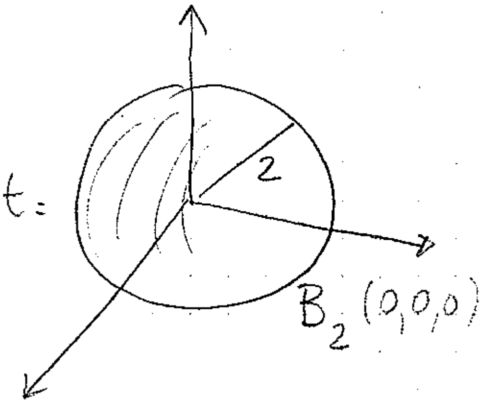
EX 3

Calcolare $I = \iiint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, dove $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 \le 4\}$

Risol.

$$I = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2} r^2 \operatorname{sen}^2\varphi \, r^2 \operatorname{sen}\varphi \, dr\right)d\varphi\right)dt =$$

coordinate sferiche



$$= 2\pi \int_0^{\pi}\left(\operatorname{sen}^3\varphi \left.\frac{r^5}{5}\right|_{r=0}^{r=2}\right)d\varphi = 2\pi\cdot\frac{32}{5}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^3\varphi\,d\varphi \overset{(*)}{=} \frac{256}{15}\pi$$

non compaiono funzioni della variabile t

$$\begin{cases} x = r\operatorname{sen}\varphi\cos t \\ y = r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}t \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$$* \int \operatorname{sen}^3\varphi\,d\varphi = \int \operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi =$$

$$= \int (1-\cos^2\varphi)\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi = \int (1-s^2)(-ds)$$

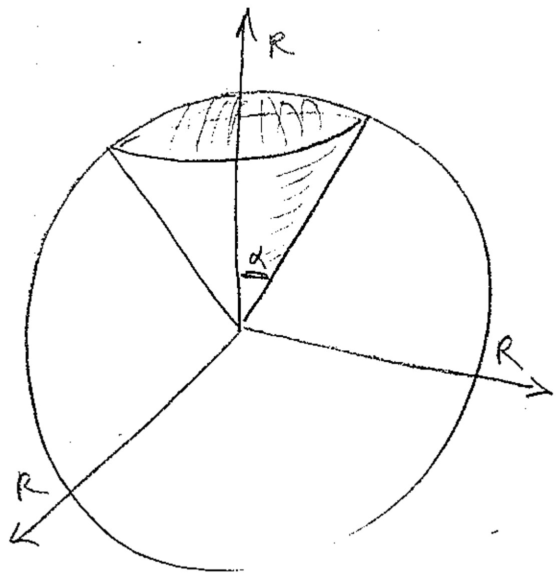
$\cos\varphi = s$

$$= \frac{s^3}{3} - s = \frac{\cos^3\varphi}{3} - \cos\varphi$$

e quindi $\displaystyle\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^3\varphi\,d\varphi = -\frac{1}{3}+1-\left(\frac{1}{3}-1\right) = 2-\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

EX 4

Calcolare il volume V del "cono+gelato" dato da $B_R(0,0,0)$ con angolo α



Risol

usando le coordinate sferiche il conto e' immediato, infatti il cono+gelato si descrive come

$$\Delta = \{(r,t,\varphi) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \le r \le R,\ 0 \le t \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \alpha\}$$

e quindi

$$V = \iiint_\Delta r^2 \operatorname{sen}\varphi \, dr \, d\varphi \, dt = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\alpha \left(\int_0^R r^2 \operatorname{sen}\varphi \, dr \right) d\varphi \right) dt =$$

$$= 2\pi \int_0^\alpha \left(\frac{r^3}{3} \Big|_0^R \right) \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi = \frac{2\pi}{3} R^3 \left(-\cos\varphi\right)\Big|_0^\alpha =$$

$$= \frac{2\pi}{3} R^3 (1 - \cos\alpha)$$

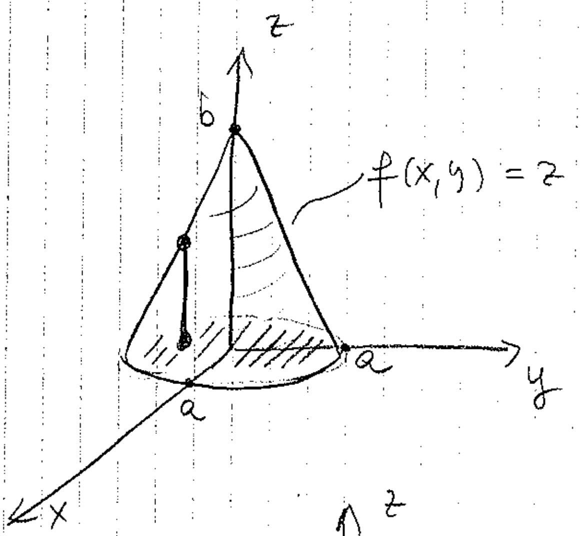
(osserviamo che con $\alpha = \pi$ otteniamo il volume della sfera $\frac{4}{3}\pi R^3$)

EX. 5

Usare il teorema di Fubini in $\mathbb{R}^3$ per calcolare il volume del cono C di base $B_a(0,0) = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2 \le a^2, z = 0\}$, altezza $b>0$, centrato sull'asse z.

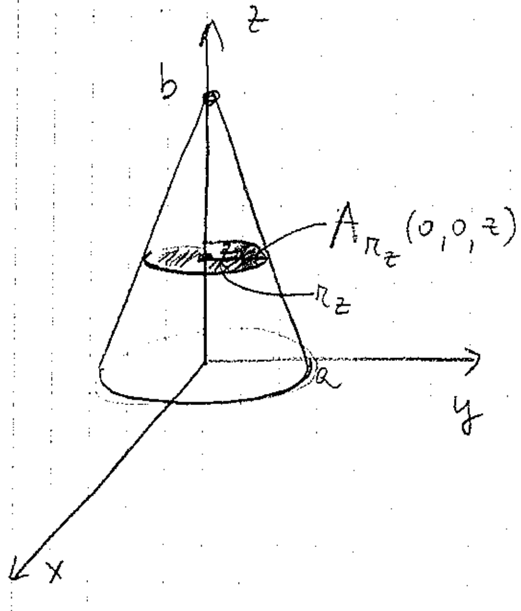
Risol

vediamolo in 2 modi



1°) $|C| =$

$$= \int_{B_a(0,0)} \left(\int_0^{f(x,y)} dz \right) dx\, dy$$



2°) $$|C| = \int_0^b \left(\int_{A_{r_z}(0,0,z)} dx\, dy \right) dz =$$

$$= \int_0^b \pi \cdot r_z^2 \, dz$$

1°) devo trovare $z = f(x,y)$

ristretta ad $x=0$ e' la retta $z = \frac{-b}{a} y + b$

ristretta ad $y=0$ e' la retta $z = \frac{b}{a} x + b$

e' evidente che e' simmetrica rispetto ad $r = \sqrt{x^2+y^2}$;

sara' quindi $f(x,y) = f(r) = \frac{-b}{a}\sqrt{x^2+y^2} + b$

Allora il volume di C sara' dato da

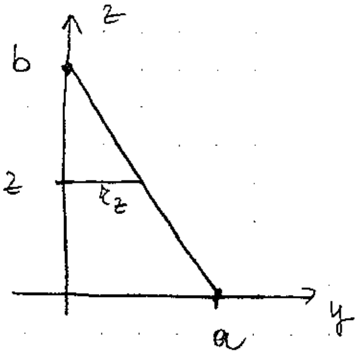
$$|C| = \int_{B_a(0,0)} \left(\int_0^{-\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}+b} dz \right) dx\,dy = \int_{B_a(0,0)} \left(-\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2} + b \right) dx\,dy$$

↑ polari

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a -\frac{b}{a} \sqrt{r^2\cos^2 t + r^2 \operatorname{sen}^2 t}\; r\, dr \right) dt + b\,|B_a(0,0)|$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a -\frac{b}{a} r^2 \right) dt + b\pi a^2 = -2\pi \frac{b}{a}\frac{a^3}{3} + b\pi a^2 = \pi a^2 b \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{\pi a^2 b}{3}$$

2°) devo trovare r_z



$a : r_z = b : b - z$

$$r_z = \frac{a(b-z)}{b}$$

(si poteva vedere anche come retta $y = -\frac{a}{b}z + a$ $\quad y = r_z$)

quindi

$$|C| = \int_0^b \pi \left(\frac{a(b-z)}{b} \right)^2 dz = \int_0^b \frac{\pi a^2}{b^2} (b-z)^2 dz =$$

$$= \frac{\pi a^2}{b^2} \frac{(b-z)^3}{3}(-1) \Big|_0^b = \frac{\pi a^2}{b^2} \frac{b^3}{3} = \frac{\pi a^2 b}{3}$$

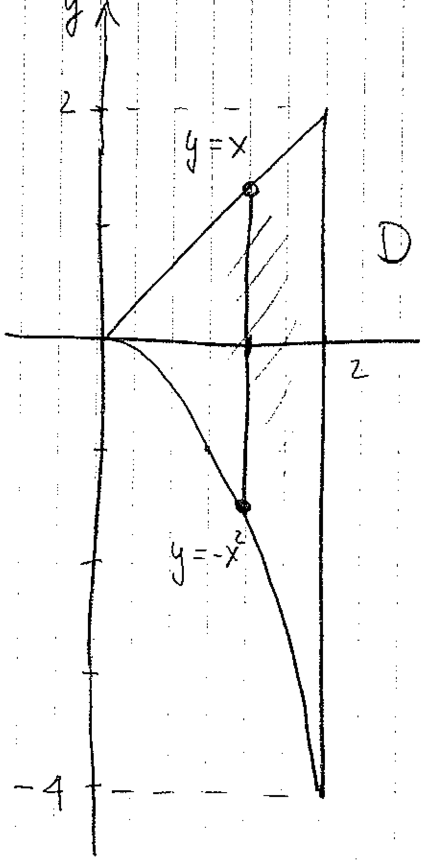
EX, 6

Calcolare l'area della figura D

1) come integrale in dx

2) come integrale in $dx\,dy$

3) come integrale in $du\,dv$ usando la trasformazione
$$\begin{cases} x = u+v \\ y = v-u^2 \end{cases}$$



Risol

1) $|D| = \int_0^2 x\,dx - \int_0^2 (-x^2)\,dx =$

$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}$

2) $|D| = \int_0^2 \left(\int_{-x^2}^{x} dy\right) dx = \int_0^2 (x+x^2)\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{14}{3}$

3) $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2u & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = |1+2u| \neq 0$ se $u \neq -\frac{1}{2}$

bisogna vedere com'è Δ (che è la descrizione in u e v di D); vediamo come si trasformano le condizioni che individuano D, cioè $y \le x$, $y \ge -x^2$ e $0 \le x \le 2$

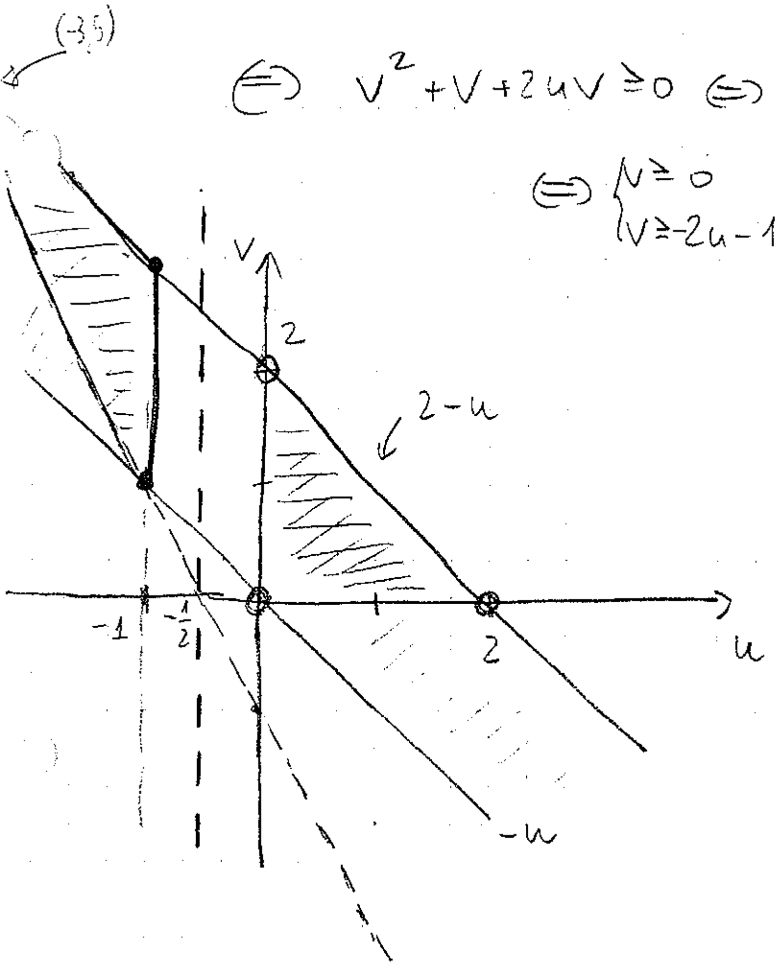
$y \le x \Leftrightarrow u+v \ge v-u^2 \Leftrightarrow u \ge -u^2 \Leftrightarrow u^2+u \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u \le 0 \\ u \le -1 \end{cases}$ o $\begin{cases} u \ge 0 \\ u \ge -1 \end{cases}$

$x \le 2 \Leftrightarrow u+v \le 2 \Leftrightarrow v \le -u+2$ // $x \ge 0 \Leftrightarrow v \ge -u$

$y \ge -x^2 \Leftrightarrow v-u^2 \ge -(u+v)^2 \Leftrightarrow v-u^2 \ge -u^2-v^2-2uv$

$$\iff v^2+v+2uv \geq 0 \iff v^2+(1+2u)v \geq 0 \iff v\left[v+(1+2u)\right] \geq 0$$

$$\iff \begin{cases} v \geq 0 \\ v \geq -2u-1 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} v \leq 0 \\ v \leq -2u-1 \end{cases}$$



Tenendo conto che deve essere anche $u \neq -\frac{1}{2}$ (affinché $\det J \neq 0$) e osservando che

$(u,v)=(0,0) \longrightarrow (0,0) = (x,y)$

$(0,2) \longrightarrow (2,2)$

$(2,0) \longrightarrow (2,-4)$,

considero la trasformazione per $u > -\frac{1}{2}$ e quindi Δ è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,2)$ e $(2,0)$. (Potevo anche considerare la trasf per $u<-\frac{1}{2}$ e Δ era il triangolo di vertici $(-1,1)$, $(-1,3)$ e $(-3,5)$)

$$|D| = \iint_\Delta |1+2u|\,du\,dv = \iint_\Delta (1+2u)\,du\,dv =$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{-u+2} (1+2u)\,dv \right) du = \int_0^2 \left(v+2uv \Big|_{v=0}^{v=-u+2} \right) du =$$

$$= \int_0^2 (-u+2-2u^2+4u)\,du = \frac{3u^2}{2}+2u-2\frac{u^3}{3}\Big|_0^2 = 6+4-\frac{16}{3} = \frac{14}{3}$$

DUE OSSERVAZIONI IMPORTANTI

1) INTEGRALI IMPROPRI IN $\mathbb{R}^2$

Studiamo gli integrali impropri notevoli $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$ nel caso di $\mathbb{R}^2$ (conti analoghi in $\mathbb{R}^n$). Vogliamo vedere quando sono finiti

i) $\displaystyle\iint_{B_1(0,0)} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^p}\,dx\,dy$ ii) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2 - B_1(0,0)} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^p}\,dx\,dy$ $\left(\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}\right)$

È evidente che la sostituzione di variabili più appropriata è il passaggio a coordinate polari

i) $$\iint_{B_1(0,0)} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^p}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \frac{1}{r^p}\, r\, dr\right)dt = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{r^{p-1}}\,dr \begin{cases} <+\infty & \text{se } p<2 \\ =+\infty & \text{se } p \geq 2 \end{cases}$$

ii) $$\iint_{\mathbb{R}^2 - B_1(0,0)} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^p}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left(\int_1^{+\infty} \frac{1}{r^p}\, r\, dr\right)dt = 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{r^{p-1}}\,dr \begin{cases} <+\infty & \text{se } p>2 \\ =+\infty & \text{se } p \leq 2 \end{cases}$$

(In $\mathbb{R}^n$ un conto analogo avrebbe dato come valore "frontiera" $p = n$)

2) CALCOLO DI $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$

(ricordo che e^{-x^2} non ha una primitiva esprimibile con funzioni elementari)

Si ha $I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dx \right) dy =$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\, dr \right) dt =$$

polari
$0 \le r < +\infty$
$0 \le t \le 2\pi$

$$= 2\pi \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr = 2\pi \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \pi \left(-e^{-\infty} + 1 \right) = \pi$$

Quindi $I = \sqrt{\pi}$

INTEGRALI DI SUPERFICIE

Ricordiamo che una superficie nello spazio è una funzione

$$\Phi : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u,v) \longmapsto \Phi(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$$

dove $\bar{D} = D \cup \partial D$, $D \subset \mathbb{R}^2$ aperto limitato e Φ ristretta a D è iniettiva. Considereremo solo il caso di <u>superficie regolari</u>, cioè il caso in cui Φ è continua insieme alle sue derivate ed inoltre

$$\Phi_u \times \Phi_v \neq (0,0,0)$$

in D, dove $\Phi_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$ e $\Phi_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$.

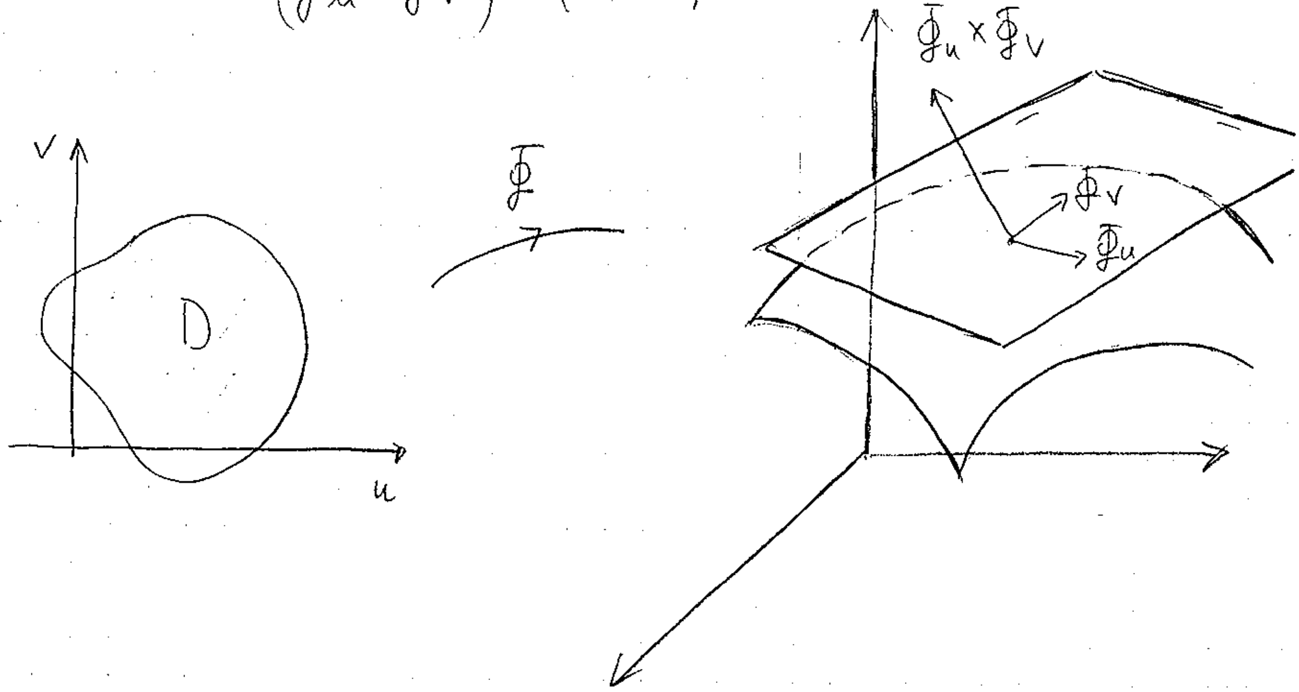
La condizione $\Phi \times \Phi_v \neq (0,0,0)$ equivale a dire che i vettori Φ_u e Φ_v sono linearmente indipendenti
(la matrice Jacobiana ha rango 2 e quindi la superficie si può vedere localmente come grafico)
L'insieme $\Sigma = \Phi(D)$ si chiama sostegno della superficie.

PIANO TANGENTE

Sia $(u_0,v_0) \in D$, sia $(x_0,y_0,z_0) = \Phi(u_0,v_0) = P_0$. Si chiama <u>piano tangente</u> a Σ nel punto P_0, il piano passante per P_0 e parallelo ai vettori $V = \Phi_u(u_0,v_0)$ e $W = \Phi_v(u_0,v_0)$.

Poiché $\Phi_u \times \Phi_v$ è normale ai vettori Φ_u e Φ_v, tale piano ha equazione

$$\left(\Phi_u \times \Phi_v\right) \circ \left(P - P_0\right) = 0$$



Il vettore

$$\nu(P_0) = \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{\| \Phi_u \times \Phi_v \|},$$

perpendicolare al piano tangente in P_0, si chiama <u>versore normale alla superficie Σ</u> nel punto $P_0 = \Phi(u_0, v_0)$

Scegliamo tale vettore come normale <u>positiva</u>

ESEMPIO: la superficie sferica

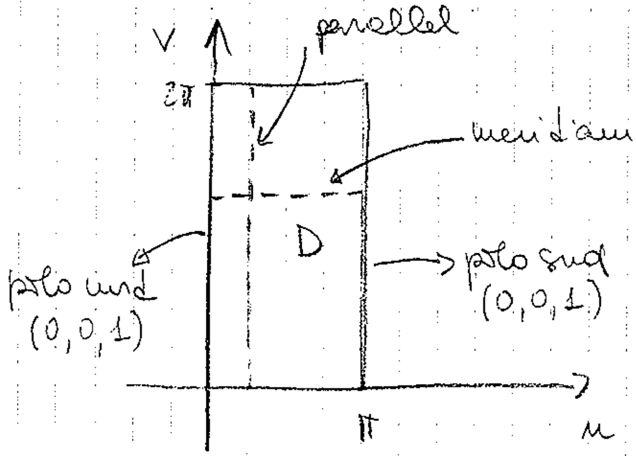
Sia $D = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : 0<u<\pi,\ 0<v<2\pi\}$

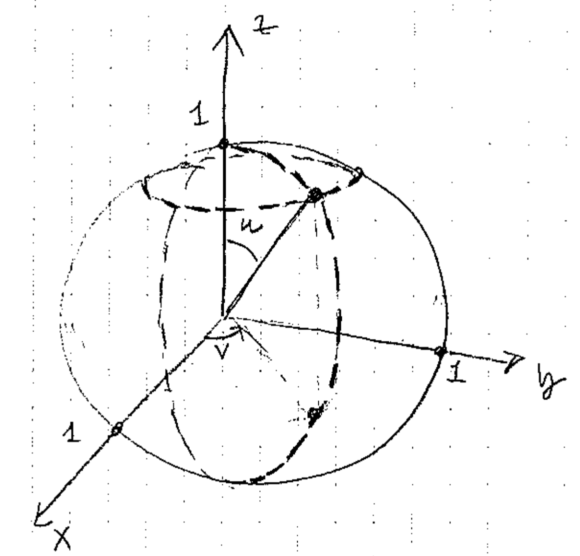
$\Phi : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\Phi(u,v) = (\operatorname{sen} u \cos v,\ \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v,\ \cos u)$$

Poiché $(\operatorname{sen} u \cos v)^2 + (\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v)^2 + \cos^2 u = 1$ è chiaro che $\Sigma = \Phi(D)$ è la superficie sferica, bordo di $B_1(0,0,0)$ che si indica anche con S^2 (ed anche ovviamente $\partial B_1(0,0,0)$)

(In generale $\Phi : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ definita da
$\Phi(u,v) = (R \operatorname{sen} u \cos v,\ R \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v,\ R\cos u)$ è la superficie sferica, bordo di $B_R(0,0,0)$)





Si ha $\begin{cases} \Phi_u = (\cos u \cos v,\ \cos u \operatorname{sen} v,\ -\operatorname{sen} v) \\ \Phi_v = (-\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v,\ \operatorname{sen} u \cos v,\ 0) \end{cases}$ e quindi

$$\Phi_u \times \Phi_v = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ & \Phi_u & \\ & \Phi_v & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2 u \cos v \\ \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v \\ \cos u \operatorname{sen} u (\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) \end{pmatrix} = \operatorname{sen} u \begin{pmatrix} \operatorname{sen} u \cos v \\ \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ \cos u \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{sen} u \; \Phi(u,v)$$

Quindi $\|\Phi_u \times \Phi_v\| = |\operatorname{sen} u| \, \|\Phi(u,v)\| = \operatorname{sen} u \neq 0$ su D

Pertanto il versore normale alla superf. sferica unit. in $P_0 = \Phi(u_0,v_0)$ / $(u_0,v_0) \in D$ e'

$$\nu(P_0) = (\operatorname{sen} u_0 \cos v_0, \operatorname{sen} u_0 \operatorname{sen} v_0, \cos u_0) = P_0$$

In generale il versore normale alla superficie sferica $\partial B_R(0,0,0)$ in P_0 e' dato da

$$\nu(P_0) = \frac{P_0}{R},$$

(in coordinate cartesiane

$$\nu(x_0,y_0,z_0) = \frac{(x_0,y_0,z_0)}{R}\;)$$

SUPERFICIE CARTESIANE

Sia $\Phi : \bar{D} \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\Phi(x,y) = (x, y, f(x,y))$$

$$\Sigma = \Phi(\bar{D}) = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in \bar{D}\} = \text{grafico di } f$$

dove $f : \bar{D} \to \mathbb{R}$ ha derivate parziali continue. Le superficie di questo tipo si chiamano <u>cartesiane</u>.

Si ha

$$\Phi_x = (1, 0, f_x) \quad , \quad \Phi_y = (0, 1, f_y)$$

e quindi

$$\Phi_x \times \Phi_y = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{pmatrix} = (-f_x, -f_y, 1) =$$

$$= (-Df, 1) \neq (0,0,0)$$

Il versore normale (diretto verso l'alto) in $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ e' dato da

$$\nu(x_0, y_0, f(x_0,y_0)) = \frac{(-Df(x_0,y_0), 1)}{\sqrt{1 + |Df(x_0,y_0)|^2}}$$

Il piano tangente per $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ ha equazione

$$\left(-f_x(x_0,y_0), -f_y(x_0,y_0), 1\right) \circ \left(x-x_0, y-y_0, z-f(x_0,y_0)\right) = 0$$

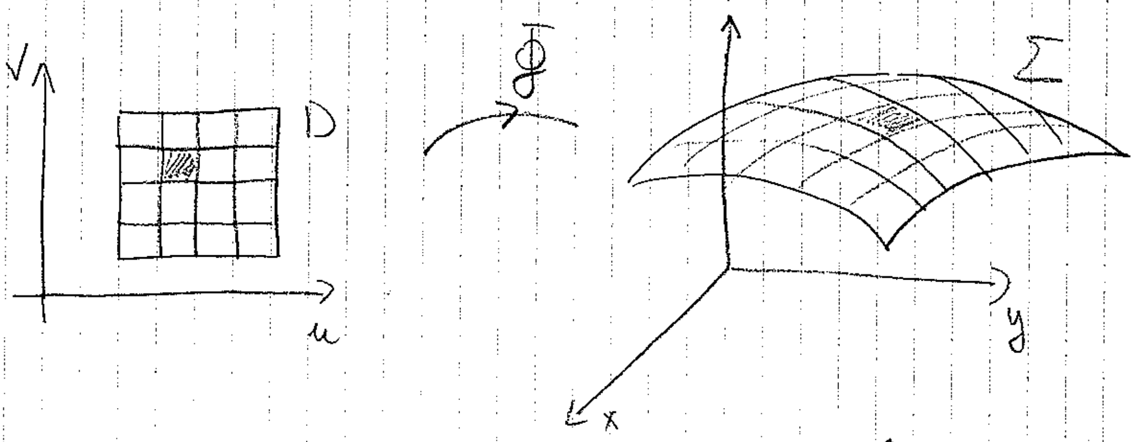
cioè

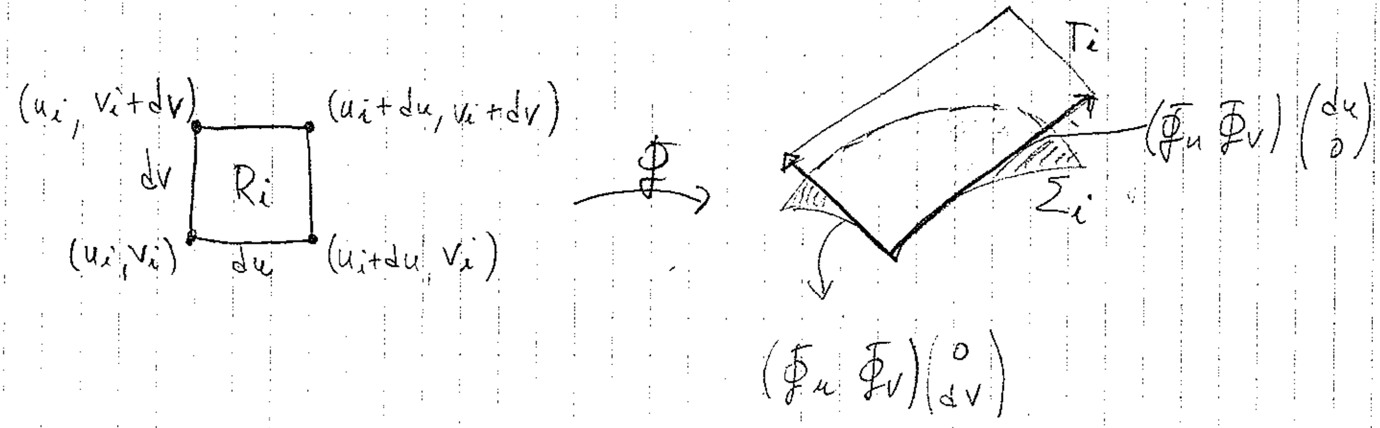
$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

AREA di una SUPERFICIE

Se $\{D_1, \dots, D_n\}$ è una partizione di D, allora, posto $\Sigma_i = \Phi(D_i)$, le superficie $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ costituiscono una partizione di Σ. In analogia a quanto visto nel cambio di variabile negli integrali doppi, poiché $|\Sigma_i| = |\Phi(D_i)| \approx \|\Phi_u \times \Phi_v\| \, |D_i|$, dove Φ_u e Φ_v sono calcolate in un punto di D_i, è naturale definire

$$\boxed{|\Sigma| = |\Phi(D)| = \iint_D \|\Phi_u \times \Phi_v\| \, du \, dv}$$





Se poi $g = g(x,y,z)$ è una funzione continua definita su $\Sigma = \Phi(D)$, definiamo

$$\boxed{\iint_{\Sigma} g \, d\sigma = \iint_{\Phi(D)} g \, d\sigma = \iint_{D} g(\Phi(u,v)) \, \| \Phi_u \times \Phi_v \| \, du \, dv}$$

Nel caso Φ sia una superficie cartesiana, i.e.

$$\Phi(x,y) = (x, y, f(x,y)) \, ,$$

$(x,y) \in D$, le due precedenti definizioni diventano

$$\boxed{|\Sigma| = \iint_D \sqrt{1+\|Df(x,y)\|^2}\,dx\,dy}$$

$$\boxed{\iint_\Sigma g\,d\sigma = \iint_D g(x,y,f(x,y))\sqrt{1+\|Df(x,y)\|^2}\,dx\,dy}$$

ESEMPIO 1

Calcolare l'area della superficie sferica $\partial B_R(0,0,0)$.

Ris:

la sfera si può descrivere con $\Phi(u,v)=(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$$\begin{cases} x(u,v) = R \operatorname{sen} u \cos v \\ y(u,v) = R \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z(u,v) = R\cos u \end{cases} \qquad \Phi : [0,\pi]\times[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

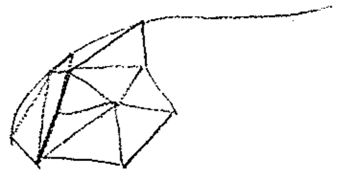
Si ha $\|\Phi_u \times \Phi_v\| = |R^2 \operatorname{sen} u| = R^2 \operatorname{sen} u$ e quindi

$$|\partial B_R(0,0,0)| = \iint_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} R^2 \operatorname{sen} u\,du\,dv = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi} R^2 \operatorname{sen} u\,du\right)dv =$$

$$= R^2\cdot 2\pi \cdot (-\cos u)\Big|_0^{\pi} = 4\pi R^2$$

OSSERVAZIONE 1

Avete notato che, riguardo all'area di una superficie, non è stato fatto cenno ad una definizione tipo quella della lunghezza di una curva come sup delle lunghezze delle poligonali inscritte. Nel caso dell'area di una superficie si potrebbe pensare al sup delle aree delle superficie poliedrali inscritte (cioè superficie di triangolini adiacenti, i cui vertici stanno tutti sulla superficie).

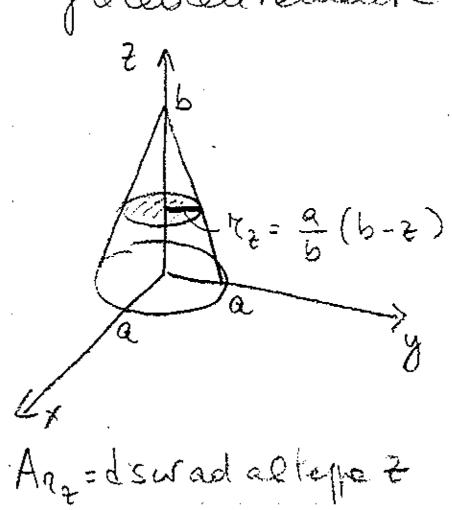


Ebbene, una tale definizione non funziona; c'è un celebre esempio, dovuto a Schwarz, che mostra come il sup delle aree delle poliedrali inscritte può essere $+\infty$ anche per un oggetto bellissimo quale la superficie laterale del cilindro.

OSSERVAZIONE 2

Attenzione a non cadere in questo errore!!

Prendiamo ad esempio il cono C di base circolare $B_a(0,0)$ e di altezza b centrato nell'asse z come in un esercizio precedentemente fatto. Uno dei modi in cui avevamo calcolato il volume era

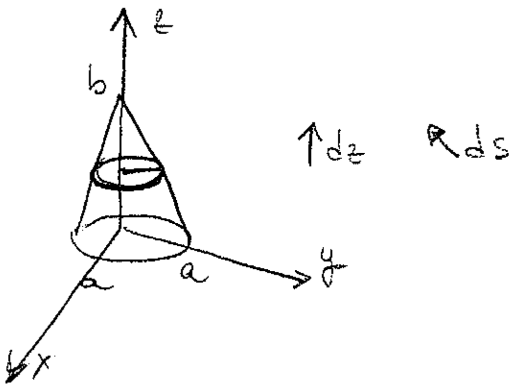


A_{r_z} = disco ad altezza z

$$|C| = \int_0^b (\text{area } A_{r_z})\, dz = \int_0^b \pi r_z^2 \, dz$$

$$= \int_0^b \pi \left(\frac{a}{b}\right)^2 (b-z)^2 \, dz = \frac{\pi a^2 b}{3}$$

Potrebbe venire la tentazione di fare la stessa cosa con la superficie, cioè dire



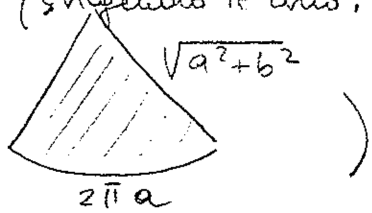
$$\text{Area}(\text{superf. di } C) = \int_0^b (\text{lunghezza}(\partial A_{r_z}))\, dz =$$

$$= \int_0^b 2\pi r_z \, dz = \int_0^b 2\pi \frac{a}{b}(b-z)\, dz =$$

$$= \frac{2\pi a}{b}\,\frac{b^2}{2} = \pi a b$$

FALSO!! infatti $\text{area}(\text{superf di } C) = \pi a \sqrt{a^2+b^2}$

(svolgendo il cono:



)

Dov'è l'errore? L'errore è che questo ragionamento è corretto se le lunghezze(∂A_{r_z}) si integrano in ds, cioè in $\sqrt{1+f'^2(z)}\, dz$, non in dz!! Si ha

$$\text{Area}(\text{superf. di } C) = \int_0^b (\text{lungh}(\partial A_{r_z}))\sqrt{1+f'^2(z)}\, dz =$$

↑ $f(z) = r_z = \frac{a}{b}(b-z)$

$$= \int_0^b 2\pi r_z \sqrt{1+r_z'^2}\, dz = \int_0^b 2\pi \frac{a}{b}(b-z)\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}\, dz =$$

$$= \int_0^b 2\pi \frac{a\sqrt{b^2+a^2}}{b^2}(b-z)\,dz = 2\pi \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}\cdot\frac{b^2}{2} = \pi a\sqrt{a^2+b^2}$$

esatto!!

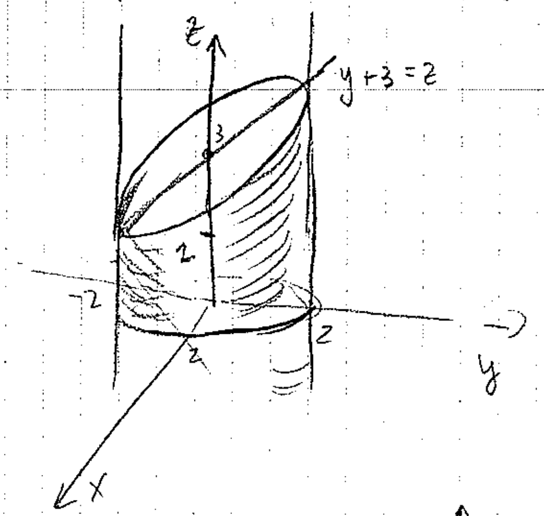
Il calcolo si poteva fare tranquillamente con la formula dell'area di una superficie $\left(z = f(x,y) = b - \frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}\right)$. Si ha

$$\text{Area}(\text{superf di } C) = \iint_{B_a(0,0)} \sqrt{1+|Df|^2}\, dx\,dy = \iint_{B_a(0,0)} \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\, dx\,dy =$$

$$= \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\,\pi a^2 = \pi a\sqrt{a^2+b^2}$$

ESEMPIO 2

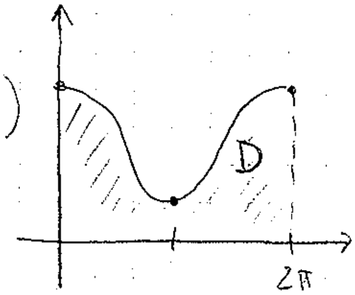
Calcolare $\displaystyle\iint_{\Sigma} z^2\, d\sigma$, dove Σ è la parte laterale del cilindro $x^2+y^2=4$ compreso tra i piani $z=0$ e $z=+y+3$



Risol.

Per descrivere Σ sembrano appropriate le coordinate cilindriche (r, t, z) con $r=2$, quindi

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\,\text{sen}\, t \\ z = z \end{cases} \qquad \Phi(t,z) = (2\cos t,\ 2\,\text{sen}\, t,\ z)$$



$$\Sigma = \Phi(D) \quad \text{con } D = \{(t,z)\in\mathbb{R}^2 :\ 0<t<2\pi,\ 0<z<\underbrace{+3+2\cos t}_{3+y}\}$$

$$\Phi_t = (-2\,\text{sen}\, t,\ 2\cos t,\ 0) \qquad \Phi_z = (0,0,1)$$

$$\Phi_t \times \Phi_z = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2\,\text{sen}\, t & 2\cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (2\cos t,\ 2\,\text{sen}\, t,\ 0)$$

$$\|\Phi_t \times \Phi_z\| = \|(2\cos t,\ 2\,\text{sen}\, t,\ 0)\| = \sqrt{4\cos^2 t + 4\,\text{sen}^2 t} = 2$$

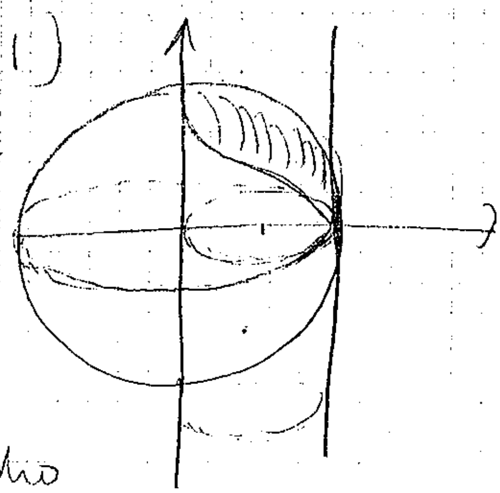
quindi

$$\iint_{\Sigma} z^2\, d\sigma = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{3+2\cos t} z^2\, 2\, dz\right) dt = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}(+3+2\cos t)^3\, dt = 60\pi$$

ESERCIZIO (FINESTRA DI VIVIANI)

Calcolare l'area dell'intersezione della superficie sferica $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ con il cilindro $x^2+y^2=Rx$

(c'è quindi solo la parte superiore)

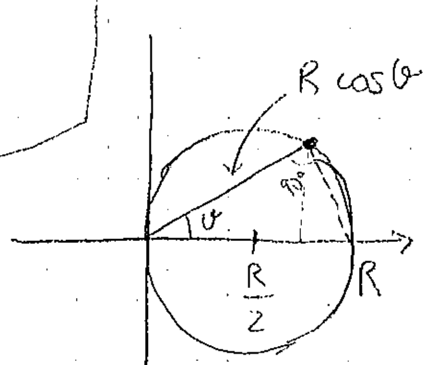


Ris: osserviamo innanzitutto che il cilindro $x^2+y^2=Rx$ è equivalente a $\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2$, quindi è individuato dalla circonferenza di centro $\left(\frac{R}{2},0\right)$ e raggio $\frac{R}{2}$. Allora l'area è data da (posto $f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$)

$$\int_{B_{\frac{R}{2}}\left(\frac{R}{2},0\right)}\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy=\int_{B_{\frac{R}{2}}\left(\frac{R}{2},0\right)}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy=$$

$$\begin{cases} f_x=\dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \\ f_y=\dfrac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \end{cases}$$

$$=\int_{B_{\frac{R}{2}}\left(\frac{R}{2},0\right)}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy=R\int_{B_{\frac{R}{2}}\left(\frac{R}{2},0\right)}\frac{dx\,dy}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}=$$



$$=R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}\int_0^{R\cos\theta}\frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{R^2-r^2}}=R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\sqrt{R^2-r^2}\right]_0^{R\cos\theta}d\theta=$$

con le coord. polari $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$ la circonf. $B_{R/2}\left(\frac{R}{2},0\right)$ si descrive con $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ col $r\in[0,R\cos\theta]$. Inoltre $|J|$ è il solito r

$$=R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(-|\text{sen}\,\theta|+1\right)d\theta=\pi R^2-2R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{sen}\,\theta\,d\theta=$$

$$\pi R^2+2R^2\cos\theta\Big|_0^{\pi/2}=\pi R^2-2R^2=R^2(\pi-2)$$

ESEMPIO 3

Calcolare l'area del grafico G_f di $f(x,y)=xy$, con $(x,y)\in B_2(0,0)$

Risol

$$\text{Area}(G_f) = \iint_{B_2(0,0)} \sqrt{1+|Df|^2}\, dx\, dy = \iint_{B_2(0,0)} \sqrt{1+y^2+x^2}\, dx\, dy =$$

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r \operatorname{sen} t \end{cases}$$

$0 \le r \le 2$

$0 \le t \le 2\pi$

$f_x = y$

$f_y = x$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \sqrt{1+r^2}\cdot r\, dr \right) dt =$$

$$= 2\pi \left. (1+r^2)^{3/2}\, \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} \right|_0^2 = 2\pi \cdot \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

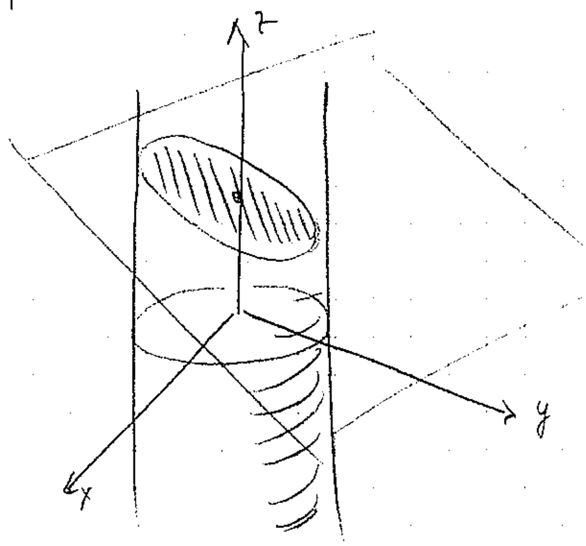
ESEMPIO 4

Calcolare l'area della porzione del piano

$$ax+by+cz+d=0$$

che sta dentro il cilindro $x^2+y^2=R^2$

Risol.



il piano $ax+by+cz+d=0$ è la superficie cartesiana

$$z = f(x,y) = -\frac{ax+by+d}{c}$$

e quindi

$$\text{Area}(G_f) = \iint_{B_R(0,0)} \sqrt{1+|Df|^2}\,dx\,dy =$$

$$f_x = -\frac{a}{c}$$

$$f_y = -\frac{b}{c}$$

$$|Df|^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2}$$

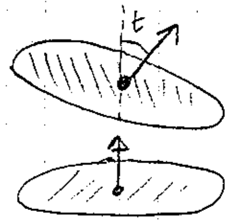
$$= \iint_{B_R(0,0)} \sqrt{1+\frac{a^2+b^2}{c^2}}\,dx\,dy =$$

$$= \sqrt{1+\frac{a^2+b^2}{c^2}}\,\left|B_R(0,0)\right| = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{|c|}\cdot \pi R^2$$

<u>OSS</u>: osserviamo che

area $\left(\begin{array}{c}\text{porzione di piano}\\ \text{su } D\end{array}\right)$ = costante · area(D) ;

cioè il fatto che nell'esempio D sia il cerchio $B_R(0,0)$ non cambia nulla. Che cos'è il fattore $\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{|c|}$? Ebbene, $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = |\cos t|$, dove t è l'angolo tra la normale a D e la normale al piano $z = f(x,y)$, cioè tra il piano orizzontale ed il piano $ax+by+cz+d=0$.



Infatti $n_D = (0,0,1)$ e $n_{G_f} = (a,b,c)$

e quindi

$n_D \circ n_{G_f} = |n_D|\cdot|n_{G_f}|\cos t \Longrightarrow$

$$\cos t = \frac{n_D \circ n_{G_f}}{|n_D|\,|n_{G_f}|} = \frac{(0,0,1)\circ(a,b,c)}{1\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$ Quindi

$$\text{Area}(D) = |\cos t|\ \text{Area}\left(\begin{array}{c}\text{porzione di}\\ \text{piano su } D\end{array}\right)$$

DEFINIZIONE

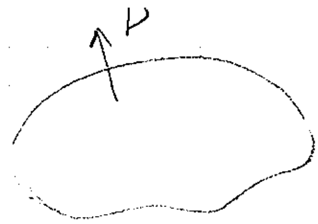
Sia $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale C^1; $V = (V_1, V_2, V_3)$.

Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie $(\Sigma = \Phi(D))$

definiamo FLUSSO di V attraverso la superficie Σ

la quantità

$$\boxed{\iint_{\Sigma} V \circ \nu \, d\sigma = \iint_{D} V(\Phi(u,v)) \circ (\Phi_u \times \Phi_v) \, du\, dv}$$



$$\nu = \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|}$$

$$d\sigma = \|\Phi_u \times \Phi_v\| \, du\, dv$$

Esso è semplicemente l'integrale su Σ della componente di V lungo la normale

ESEMPIO 1

Calcolare il flusso del campo $V = (x, y, z)$ attraverso la superficie sferica $\partial B_1(0,0,0)$

Risol.

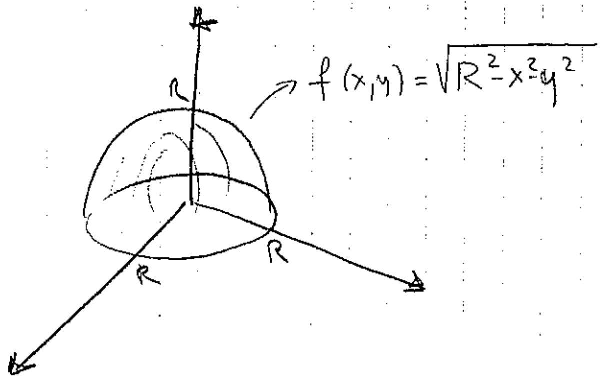
$$\text{Flusso} = \iint_{\partial B_1(0,0,0)} (x,y,z) \circ \nu \, d\sigma = \iint_{\partial B_1(0,0,0)} (x,y,z) \circ (x,y,z) \, d\sigma =$$

$$= \iint_{\partial B_1(0,0,0)} (x^2+y^2+z^2) \, d\sigma = \iint_{\partial B_1(0,0,0)} d\sigma = \text{area}(\partial B_1(0,0,0)) = 4\pi$$

ESEMPIO 2

Calcolare il flusso del campo vettoriale $V=(0,0,xy+y^2)$ attraverso la superficie Σ definita da $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z>0$

Risol.



$$\text{Flusso} = \iint_{\Sigma} V \circ \nu \, d\sigma =$$

$$\nu = \frac{(x,y,z)}{R}$$

$$|Df|^2 = \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2$$

$$1+|Df|^2 = \frac{R^2-x^2-y^2+x^2+y^2}{R^2-x^2-y^2} = \frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}$$

$$= \iint_{B_R(0,0)} (0,0,xy+y^2)\circ\left(\frac{x,y,z}{R}\right)\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{B_R(0,0)} z(xy+y^2)\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy =$$

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

$$= \iint_{B_R(0,0)} (xy+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R (r\cos t\, r\,\mathrm{sen}\, t + r^2\mathrm{sen}^2 t)\, r\,dr\right)dt =$$

polari

$$= \int_0^{2\pi}\left[(\cos t\,\mathrm{sen}\,t + \mathrm{sen}^2 t)\int_0^R r^3\,dr\right]dt = \frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi}(\cos t\,\mathrm{sen}\,t+\mathrm{sen}^2 t)\,dt = \frac{\pi}{4}R^4$$

Uno dei principali teoremi che coinvolgono integrali di superficie è il teorema della divergenza. Ricordiamo la definizione di divergenza

DEFINIZIONE

Sia $V: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione vettoriale (o un campo vettoriale, $V=(V_1,V_2,V_3)$) di classe C^1. Definiamo divergenza di V (e scriveremo $\operatorname{div} V$) la funzione scalare data da

$$(\operatorname{div} V)(x,y,z) = \frac{\partial V_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial V_3}{\partial z}(x,y,z)$$

Possiamo adesso enunciare il

TEOREMA (della divergenza)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un aperto limitato regolare (*)

Sia $V: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione vettoriale di classe C^1

Allora

$$\boxed{\iint_{\partial\Omega} V \cdot \nu \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} V \, dx\,dy\,dz}$$

ν normale a $\partial\Omega$ rivolta verso l'esterno

(*) questo significa che Ω, in un intorno di ogni punto della sua frontiera, coincide con il sottografico di una funzione di classe C^1 definita su uno dei piani coordinati dim:

dimostriamo questo teorema nel caso più semplice in cui Ω sia normale rispetto ai tre piani coordinati. In particolare, essendo il nostro dominio normale rispetto al piano x,y, esistono un aperto $D \subset \mathbb{R}^2$ e due funzioni $f, g : D \to \mathbb{R}$ tali che

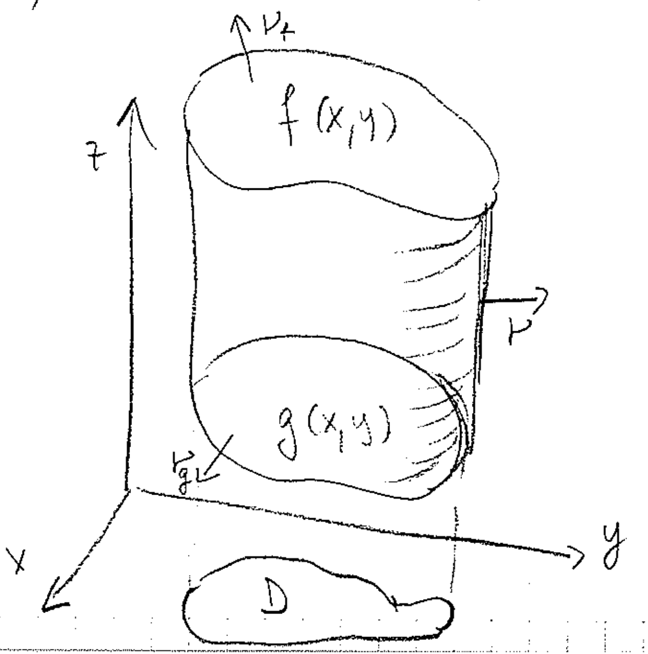
$$\Omega = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ g(x,y) < z < f(x,y)\}.$$

Facciamo vedere che

$$\iint_{\partial\Omega} (0,0,V_3) \circ \nu \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \frac{\partial V_3}{\partial z} \, dx\, dy\, dz$$, dove ν è la normale esterna a $\partial\Omega$

Gli altri due pezzi mancanti dell'enunciato si ottengono allo stesso modo, sfruttando la normalità di Ω rispetto agli altri due assi coordinati.

Calcoliamo dapprima il flusso. Si noti che il contributo all'integrale "della superf laterale" di $\partial\Omega$ è zero, perché il campo di vettori che stiamo considerando è diretto lungo l'asse z, mentre la normale è orizzontale: rimangono solo i contributi dovuti all'integrazione sui grafici di f e di g; in conclusione, ricordando la definizione di integrale di superficie, otteniamo



$$\iint_{\partial\Omega} (0,0,V_3) \circ \nu \, d\sigma =$$

$\left(\nu_f = (-f_x, -f_y, 1),\ \nu_g = (g_x, g_y, -1)\right)$

$$= \iint_D (0, 0, V_3(x, y, f(x,y))) \circ (-f_x, -f_y, 1)\, dx\, dy \; -$$

$$- \iint_D (0, 0, V_3(x, y, g(x,y))) \circ (-g_x, -g_y, 1)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_D V_3(x, y, f(x,y))\, dx\, dy - \iint_D V_3(x, y, g(x,y))\, dx\, dy$$

(Si noti che il segno meno è dovuto al fatto che la normale esterna a ∂ l punta verso il basso sul grafico di g)

D'altra parte

$$\iiint_\Omega \frac{\partial V_3}{\partial z}\, dx\, dy\, dz \underset{\text{Fubini}}{=} \iint_D \left(\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} \frac{\partial V_3}{\partial z}\, dz \right) dx\, dy =$$

$$= \iint_D \left(V_3(x, y, f(x,y)) - V_3(x, y, g(x,y)) \right) dx\, dy$$

e si ha la tesi

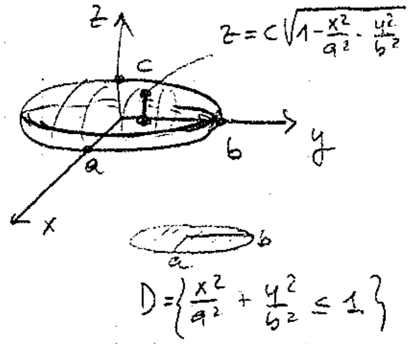
#

ESERCIZIO

Calcolare il flusso del campo vettoriale $V(x,y,z) = (3xy^2 - x^3,\ yz^2 - y^3,\ 3x^2 z)$ attraverso la superficie Σ data da $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (ellissoide)

Risol.

Dobbiamo calcolare $I = \iint_{\Sigma} V \cdot \nu \, d\sigma$. Grazie al teorema della divergenza



$$I = \iiint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1} \mathrm{div}\, V \, dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1} (3y^2 - 3x^2 + z^2 - 3y^2 + 3x^2)\, dx\,dy\,dz = \iiint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1} z^2 \, dx\,dy\,dz =$$ (*) prossima pagina

$$= 2 \iiint_{\left\{0 \le z \le c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},\ \underbrace{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1}_{D}\right\}} z^2 \, dx\,dy\,dz = 2 \iint_D \left(\int_0^{c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} z^2 \, dz \right) dx\,dy =$$

$$= 2 \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1} \frac{1}{3} c^3 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{3/2} dx\,dy = \frac{2}{3} c^3 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (1 - r^2)^{3/2} r\,ab\, dr \right) dt =$$

$$\begin{cases} x = a r \cos t \\ y = b r \operatorname{sen} t \end{cases}$$

$$= \frac{2}{3} c^3 \cdot 2\pi \cdot (1 - r^2)^{5/2} \frac{2}{5} \left(-\frac{1}{2}\right) ab \Big|_0^1 = + \frac{8\pi}{30} abc^3 = \frac{4}{15} abc^3 \pi$$

(*) si potrebbe anche calcolare usando delle coordinate sferiche "adattate". Se si pone

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = r \operatorname{sen}\varphi \cos t \\ \frac{y}{b} = r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} t \\ \frac{z}{c} = r\cos\varphi \end{cases}$$

si ha

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2$$

e quindi l'ellissoide si descrive con

$$\{0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le t \le 2\pi\},$$

si ha

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,t)} = r^2 abc \operatorname{sen}\varphi$$

e quindi

$$\iiint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1} z^2\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^1 (cr\cos\varphi)^2 r^2 abc \operatorname{sen}\varphi\,dr\right)d\varphi\right)dt =$$

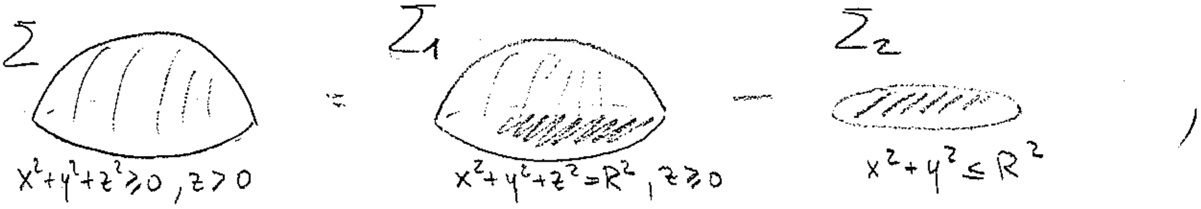
$$= 2\pi\int_0^{\pi}\left(\operatorname{sen}\varphi\cos^2\varphi \cdot abc^3\int_0^1 r^4\,dr\right)d\varphi =$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi} abc^3\frac{1}{5}\operatorname{sen}\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi \underset{\cos\varphi = s}{=} \frac{2\pi abc^3}{5}\int_1^{-1} s^2(-ds) = \frac{2\pi abc^3}{5}\cdot\frac{2}{3} =$$

$$= \frac{4}{15}abc^3\pi$$

Questo teorema, che rimanda il calcolo d'un integrale superficiale ad un integrale di volume, a volte è comodo anche quando la superficie non è bordo di un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Ad esempio, potrebbe essere utile applicare il teorema per il calcolo del flusso dell'esercizio precedente con $V=(0,0,xy+y^2)$ e $\Sigma = \{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2=R^2,\ z>0\}$, ma Σ non è bordo un insieme Ω. Posso però vedere Σ come "parte" del bordo d'un insieme, cioè

$$\Sigma = \left(\partial \underset{\text{superiore}}{\text{semisfera}}\ B_R(0,0,0)\right) - \left(\text{disco } B_R(0,0) \text{ nel piano } x,y\right)$$



ed il bordo della semisfera superiore $B_R(0,0,0)$ è il bordo d'un insieme e quindi posso applicare il teorema. Si ha

$$\iint_{\Sigma_1} V \cdot \nu \, d\sigma = \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \\ z \geq 0}} \operatorname{div} V \, dx\,dy\,dz \quad , \text{ quindi}$$

$$\iint_{\Sigma} V \cdot \nu \, d\sigma = \underbrace{\iint_{\Sigma_1} V \cdot \nu \, d\sigma}_{\text{applico il teorema}} - \underbrace{\iint_{\Sigma_2} V \cdot \nu \, d\sigma}_{\text{flusso più semplice perché } \Sigma_2 \text{ è un piano}} = \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \\ z \geq 0}} \operatorname{div} V \, dx\,dy\,dz - \iint_{\Sigma_2} V \cdot \nu \, d\sigma$$

Ovviamente questo procedimento vale la pena se al posto d'un flusso complicato si passa ad un flusso molto semplice ed ad un integrale triplo facilmente abordabile

Calcoliamo $\iint_{\Sigma_2} V \circ \nu \, d\sigma$ e $\iiint_{B_R(0,0,0)\cap\{z\geq 0\}} \operatorname{div} V \, dx\,dy\,dz$

$$\iiint_{B_R(0,0,0)\cap\{z\geq 0\}} 0 \, dx\,dy\,dz = 0$$

sul disco orizzontale
$d\sigma = dx\,dy$
$\nu = (0,0,-1)$

$$\iint_{\Sigma_2} (0,0,xy+y^2)\circ(0,0,-1)\,d\sigma =$$

$$= \iint_{B_R(0,0)} (-xy-y^2)\,dx\,dy = \quad \text{polari}$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R (-r\cos t\, r\,\mathrm{sen}\,t - r^2\mathrm{sen}^2 t)\, r\,dr\right)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos t\,\mathrm{sen}\,t\left(-\frac{r^4}{4}\Big|_0^R\right)dt + \int_0^{2\pi}\mathrm{sen}^2 t\left(-\frac{r^4}{4}\Big|_0^R\right)dt =$$

$$= 0 + \pi\left(-\frac{R^4}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}R^4$$

Quindi $\iint_{\Sigma} V\circ\nu\,d\sigma = -\left(-\frac{\pi}{4}R^4\right) = \frac{\pi}{4}R^4$, come già precedentemente ottenuto

Cogliamo qui l'occasione per enunciare un importante teorema analogo bidimensionale.

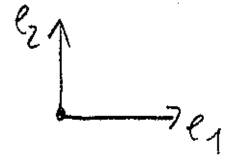
TEOREMA (formula di Gauss-Green)

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ aperto limitato normale rispetto ai due assi coordinati. Supponiamo inoltre che la frontiera di D sia regolare e che $A(x,y)$, $B(x,y)$ siano due funzioni regolari definite su $\mathbb{R}^2$. Allora vale l'identità

$$\int_{\partial D} A\,dx + B\,dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx\,dy$$

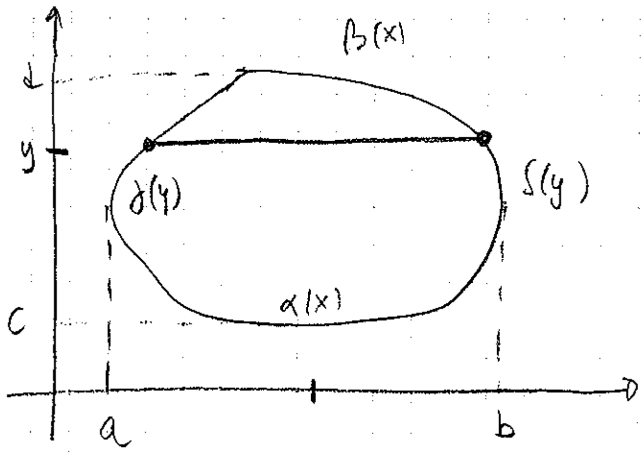
dove si conviene orientare la frontiera ∂D in modo che in ogni punto $P \in \partial D$, la coppia ordinata di vettori ortogonali $(\tau(P), n(P))$, dove $n(P)$ è la normale uscente da D nel punto P e $\tau(P)$ il vettore tangente a ∂D nel senso di percorrenza della curva, si possa portare a coincidere con la coppia ordinata (e_1, e_2) tramite una rotazione. (orientamento positivo: a volte si scrive $+\partial D$)
(per i domini normali rispetto agli assi coordinati questo equivale ad orientare la frontiera in senso antiorario; è però utile dare questa definizione per domini un po' più generali)

$$\tau = \frac{(x', y')}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$



$$\nu = \frac{(y', -x')}{\sqrt{y'^2 + x'^2}} \qquad n = \frac{(-y', x')}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

dim:



dimostriamo che $\iint_D \frac{\partial B}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{\partial D} B\, dy$

(analogamente si dimostra che $-\iint_D \frac{\partial A}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{\partial D} A\, dy$)

Si ha

$$\iint_D \frac{\partial B}{\partial x}\, dx\, dy \overset{\text{Fubini}}{=} \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} \frac{\partial B}{\partial x}\, dx \right) dy \overset{\text{teor. fond. del calcolo}}{=}$$

$$= \int_c^d \left[B(\delta(y), y) - B(\gamma(y), y) \right] dy$$

Ma si ha anche che

$$\int_{\partial D} B\, dy = \int_c^d \left[B(\delta(y), y) - B(\gamma(y), y) \right] dy$$

#

NOTA BENE 1

Vediamo perché la formula di Gauss-Green è l'analogo bidimensionale del teorema della divergenza.

Sia $V: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ campo vettoriale C^1 in D, $V = (V_1, V_2)$; sia $\partial D = \{\gamma(t) = (x(t), y(t)),\ t \in [a,b]\}$.

Scriviamo i termini della formula di Gauss-Green con $A = -V_2$ e $B = V_1$. Si ottiene

$$\int_{\partial D} (-V_2\,dx + V_1\,dy) = \int_a^b -V_2\,x'(t)\,dt + V_1\,y'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b \left(-V_2\,x'(t) + V_1\,y'(t)\right) dt = \int_a^b (V_1, V_2) \circ (y'(t), -x'(t))\,dt =$$

$$= \int_a^b (V_1, V_2) \circ \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt =$$

$$= \int_{\partial D} V \circ \nu\,ds$$, mentre

$$\iint_D \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} - \frac{\partial(-V_2)}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y}\right) dx\, dy =$$

$$= \iint_D \operatorname{div} V \, dx\, dy$$

Quindi, per Gauss-Green, otteniamo

$$\boxed{\int_{\partial D} V \circ \nu \, ds = \iint_D \operatorname{div} V \, dx\, dy} ,$$

che è proprio il teorema della divergenza in $\mathbb{R}^2$

NOTA BENE 2

Dalla formula di Gauss-Green con $A(x,y) = -y$ e $B(x,y) = x$ si ottiene, poiché $\frac{\partial A}{\partial y} = -1$ e $\frac{\partial B}{\partial x} = 1$,

$$\int_{\partial D} (-y\,dx + x\,dy) = \iint_D 2\, dx\, dy = 2|D| ,$$

cioè

$$\boxed{|D| = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx}$$

formula di Riemann per l'area di D

ESEMPIO

Usare Gauss-Green per calcolare $\int_\gamma y^2 dx + x\,dy$, dove γ è la circonferenza unitaria percorsa in senso antiorario

Ris.:

$$\int_\gamma y^2 dx + x\,dy = \iint_{B_1(0,0)} (1-2y)\,dx\,dy = |B_1(0,0)| - \iint_{B_1(0,0)} 2y\,dx\,dy =$$

Gauss-Green con $A = y^2$, $B = x$

$$= \pi - \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 2r\,\mathrm{sen}\,t\; r\,dr \right) dt = \pi - \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}\,\mathrm{sen}\,t\,dt =$$

polari

$$= \pi + \frac{2}{3}\cos t \Big|_0^{2\pi} = \pi$$

Ricordiamo come avevamo fatto senza Gauss-Green:

$$\int_\gamma y^2 dx + x\,dy = \int_0^{2\pi} \left[\mathrm{sen}^2 t\,(-\mathrm{sen}\,t) + \cos t\,(\cos t) \right] dt =$$

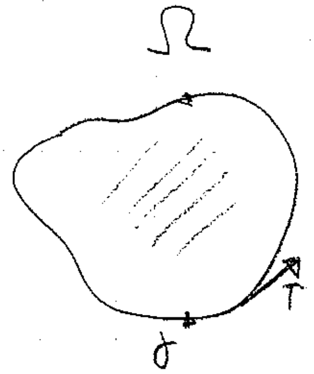
$\gamma(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\,t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \mathrm{sen}^3 t)\,dt = \pi$$

ESERCIZIO

Ω aperto limitato la cui frontiera $\gamma = \partial\Omega$ è una curva chiusa semplice e regolare. Siano $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe C^1. Dimostrare che

$$\int_\gamma f \cdot Dg \circ T \, ds = - \int_\gamma g \, Df \circ T \, ds$$



dove T è il versore tangente a γ

Ris.

devo dimostrare che

$$\int_\gamma D(fg) \circ T \, ds = \int_\gamma (f Dg + g Df) \circ T \, ds = 0$$

lo posso vedere in due modi.

1) MODO DIRETTO

$$\int_\gamma D(fg) \circ T \, ds = \int_a^b D(fg) \circ \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}} \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)} \, dt =$$

$$= \int_a^b (fg)_x \, x'(t) \, dt + (fg)_y \, y'(t) \, dt = \int_\gamma (fg)_x \, dx + (fg)_y \, dy =$$

$= 0$ perché γ è chiusa e $(fg)_x dx + (fg)_y dy$ è esatte infatti Ω è semplicemente connesso e la forma è chiusa:

$$\frac{\partial (fg)_x}{\partial y} = (fg)_{xy} \quad e \quad \frac{\partial (fg)_y}{\partial x} = (fg)_{yx} \underset{\downarrow}{=} (fg)_{xy}$$

Schwarz con $f, g \in C^1$

2) MODO con l'USO DI GAUSS-GREEN

$$\int_\gamma D(fg) \circ \tau \, ds = \int_a^b D(fg) \circ \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}} \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)} \, dt =$$

$$= \int_a^b ((fg)_x, (fg)_y) \circ \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}} \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)} \, dt =$$

$$= \int_a^b ((fg)_y, -(fg)_x) \circ \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}} \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)} \, dt =$$

$$= \int_\gamma ((fg)_y, -(fg)_x) \circ \nu \, ds = \iint_\Omega \operatorname{div}((fg)_y, -(fg)_x) \, dx \, dy =$$

GAUSS GREEN

$$= \iint_\Omega (fg)_{yx} - (fg)_{xy} \, dx \, dy \underset{\downarrow}{=} 0$$

schwarz con $f, g \in C^1$

Un altro importante teorema che coinvolge l'integrazione su superficie in $\mathbb{R}^3$ è il teorema di Stokes. Per enunciarlo abbiamo bisogno della definizione di rotore

DEFINIZIONE

Sia $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione vettoriale di classe C^1, $V = (V_1, V_2, V_3)$. Definiamo rotore di V (e scriveremo $\text{rot } V$) la funzione vettoriale

$$(\text{rot } V)(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (V_1, V_2, V_3) =$$

$$= \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}, \frac{\partial V_3}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial z}, \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)$$

Possiamo adesso enunciare il

TEOREMA (di Stokes)

Sia Σ una superficie orientata in $\mathbb{R}^3$ con normale positiva ν e supponiamo che $\partial\Sigma$ sia una curva regolare con versore tangente τ. Denotiamo con n la normale a $\partial\Sigma$, orientata verso l'esterno di Σ. Supponiamo che τ sia orientato in modo che la terna di vettori (τ, ν, n) sia riconducibile con una rotazione alla terna (e_1, e_2, e_3) (in altri termini supp $\tau \times \nu = n$). Allora

$$\iint_{\Sigma} (\text{rot } V) \circ \nu \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} F \circ \tau \, ds$$