CONVERGENZA UNIFORME

LO SPAZIO L^∞

Sia $A \subset \mathbb{R}$. Sia $f : A \to \mathbb{R}$
Denotiamo con $L^\infty(A)$ l'insieme

$$L^\infty(A) = \{ f : A \to \mathbb{R},\ f \text{ limitata} \} =$$

$$= \{ f : A \to \mathbb{R},\ \sup\{|f(x)|,\ x \in A\} < +\infty \}.$$

L'insieme $L^\infty(A)$ e' uno spazio vettoriale, cioe'

$$f, g \in L^\infty(A) \implies f+g \in L^\infty(A) \quad \lambda f \in L^\infty(A) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

In $L^\infty(A)$ definiamo una norma mediante (*)

$$\|f\|_\infty = \sup\{ |f(x)|;\ x \in A \}$$

(norma $\| \ \|_\infty$)

e definiamo la distanza in L^∞ (o <u>distanza uniforme</u>) mediante

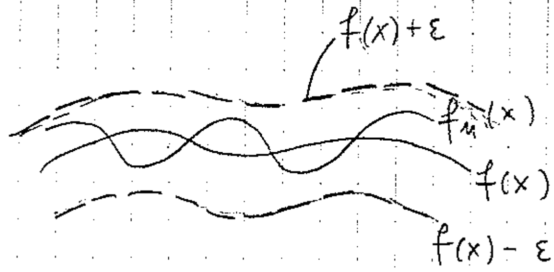
$$d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty \quad \forall f, g \in L^\infty(A)$$

(distanza d_∞)

OSS: tutto il discorso e' valido anche nel caso $A \subset \mathbb{R}^n$

(*) $\| \ \| : V \to [0,+\infty)$ sse $\|v\| \geq 0$ e $=0 \iff v=0$, $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$, $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

DEFINIZIONE



Diremo che

$$f_n \xrightarrow[n]{} f \quad \underline{\text{uniformemente}} \text{ su } A$$

se $d_\infty(f_n, f) \xrightarrow[n]{} 0$, cioè se $\|f - f_n\|_\infty \xrightarrow[n]{} 0$

In altre parole $f_n \xrightarrow[n]{} f$ uniformemente su A se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon$ (indipendente da $x \in A$) t.c.

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon \quad \forall x \in A$$

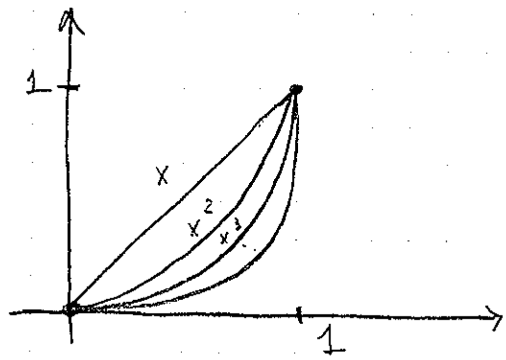
NOTA BENE

$$f_n \xrightarrow[n]{} f \text{ uniformemente } \overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow} f_n(x) \xrightarrow[n]{} f(x) \quad \forall x \in A$$

Infatti: $\Rightarrow$ segue dalla definizione

$\not\Leftarrow$ consideriamo il seguente esempio

$A = (0,1) \subset \mathbb{R} \quad f_n(x) = x^n$



$f_n(x) \xrightarrow[n]{} 0 (= f) \quad \forall x \in (0,1)$

Tuttavia

$$\|f_n(x) - f(x)\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f(x)|,\ x \in (0,1)\} =$$

$$= \sup\{|f_n(x)|,\ x \in (0,1)\} = \sup\{x^n,\ x \in (0,1)\} = 1 \not\xrightarrow[n]{} 0$$

DEFINIZIONE

Se $\lim_n f_n(x) = f(x) \ \forall x \in A$, diremo che

$$f_n \xrightarrow[n]{} f \quad \underline{\text{puntualmente}}$$

Allora la NOTA BENE si può riscrivere

$$f_n \xrightarrow[n]{} f \text{ uniformemente } \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f_n \xrightarrow[n]{} f \text{ puntualmente}$$

La convergenza puntuale si dimostra spesso troppo debole in molte questioni. Vediamo con degli esempi che

1) $f_n : A \to \mathbb{R}$
f_n continue $\quad f_n \xrightarrow[n]{} f$ puntualmente $\Big\} \not\Rightarrow f$ continua

2) $f_n : A \to \mathbb{R}$
f_n derivabile $\quad f_n \xrightarrow[n]{} f$ puntualmente $\Big\} \not\Rightarrow f$ derivabile
($\not\Rightarrow f$ continua)

3) $f_n : A \to \mathbb{R}$
f_n integrabile (sec. Riemann) $\quad f_n \xrightarrow[n]{} f$ puntualmente $\Big\} \not\Rightarrow f$ integrabile (sec. Riemann)

1) Se nell'esempio precedente si prende $A = [0,1]$, si ha che $f_n(x) \xrightarrow[n]{} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ (puntualmente)

Le f_n sono continue, ma la f non lo è.

2) Poiché le f_n in 1) sono anche derivabili, l'esempio mostra anche che limite uniforme di funzioni derivabili non solo non è derivabile, ma neppure continua.

3) Consideriamo $f_n(x) = \varphi_{\{q_1, \dots, q_n\}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \{q_1, \dots, q_n\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$,

dove $q_1, q_2, \dots, q_n$ è un'enumerazione dei numeri razionali di $[0,1]$. Si ha che $f_n(x)$ è integrabile secondo Riemann in $[0,1]$ $\forall n$ e vale $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$ $\forall n$, mentre la funzione $f(x) = \lim_n f_n(x)$ è la funzione caratteristica dei razionali di $[0,1]$, cioè la funzione di Dirichlet, che non è integrabile secondo Riemann.

Vediamo un altro esempio di converg. punt., ma non uniforme.

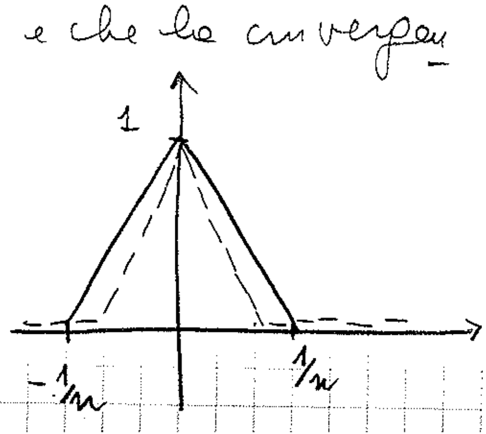
$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ $A = \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \geq \frac{1}{n} \\ 1 - n|x| & \text{se } |x| < \frac{1}{n} \end{cases}$

le funzioni f_n sono continue ed $f_n(x) \xrightarrow[n]{} f(x)$ puntualmente, dove $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$.

Osserviamo che $f(x)$ non è continua e che la convergenza non è uniforme, infatti

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f(x)|,\ x \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \sup\{1 - n|x|,\ x \neq 0,\ |x| < \tfrac{1}{n}\} = 1 \not\xrightarrow[n]{} 0.$$



Vediamo adesso che la convergenza uniforme assicura invece la continuità della funzione limite nel caso di una successione di funzioni continue. E' come dire che si possono scambiare il limite della successione e il limite della continuità: $\lim_{t\to x} \lim_n f_n(t) = \lim_n \lim_{t \to x} f_n(t)$

In generale non si può scambiare l'ordine in cui si fanno i limiti
$\lim_n \lim_m \frac{m}{m+n} = 1$, $\lim_m \lim_n \frac{m}{m+n} = 0$

TEOREMA $A \subset \mathbb{R}$. Allora

$$\left.\begin{array}{l} f_n : A \to \mathbb{R} \text{ continue} \\ f_n \xrightarrow[n]{} f \text{ uniformemente} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ è continua}$$

dim: vediamo che f è continua in x_0, cioè che

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta_{\varepsilon, x_0} > 0$ tale che

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x : |x - x_0| < \delta .$$

Si ha

$$|f(x) - f(x_0)| \le \overbrace{|f(x) - f_n(x)|} + |f_n(x) - f_n(x_0)| + \overbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}$$

e, poiché $f_n \to f$ uniformemente, $\exists\, n_\varepsilon$ t.c.

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n > n_\varepsilon \quad \forall x \in A .$$

Quindi, fissato $n > n_\varepsilon$ ho che

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f_n(x) - f_n(x_0)| + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} .$$

Ora, poiché f_n è continua $\exists\, \delta > 0$ t.c. $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall x : |x - x_0| < \delta$ e quindi, se $x : |x - x_0| < \delta$, si avrà

$$|f(x) - f(x_0)| \le \frac{\varepsilon}{3} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \qquad \#$$

<u>OSS</u>: questo teorema ci dà un modo per testare la convergenza non uniforme d'una successione di funz. continue, spesso più agevole di quello della verifica diretta. Infatti, presa una successione di funzioni continue, se il suo limite non è una funzione continua, si può affermare che la convergenza non è uniforme.

Chiaramente questo funziona solo nel caso la funzione limite sia discontinua. In caso contrario bisognerà studiare più approfonditamente la successione f_n. Vediamo un esempio

ESEMPIO

Studiare la convergenza di $f_n(x) = n^p x e^{-nx}$, $x \in [0,1]$, $p > 0$.

Le funzioni f_n sono continue e si ha

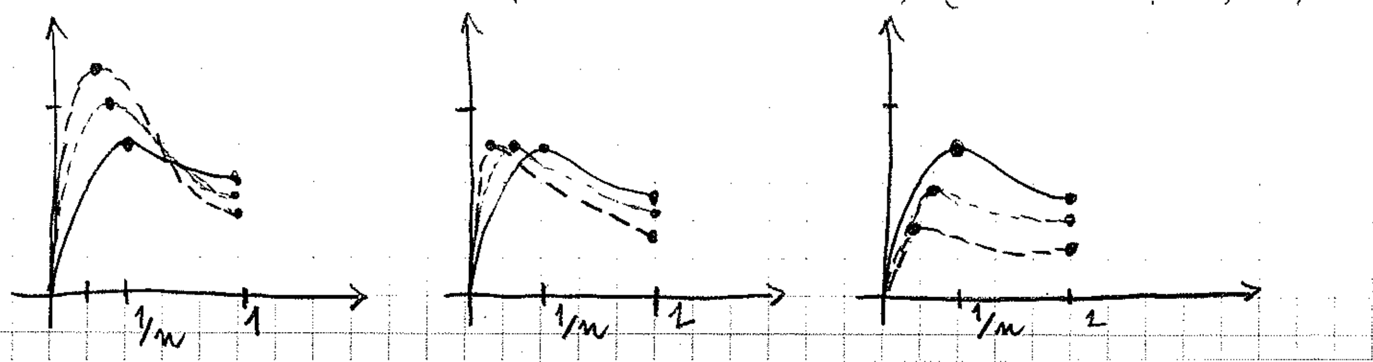
$\lim_n f_n(x) = 0 = f(x) \quad \forall x \in [0,1]$. Inoltre $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = \frac{n^p}{e^n}$

$$f_n'(x) = n^p e^{-nx} + n^p x e^{-nx}(-n) = n^p e^{-nx}(1-nx)$$

$$f_n'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{n} \quad (\text{MAX}), \quad f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^{p-1}\frac{1}{e}$$

Si ha $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^{p-1} \cdot \frac{1}{e} \xrightarrow[n]{} \begin{cases} +\infty & \text{se } p > 1 \\ 1/e & \text{se } p = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < p < 1 \end{cases}$

Mentre il punto di massimo si va avvicinando allo zero, il valore massimo va rispettivamente a $+\infty$, $\frac{1}{e}$ e 0 se $p > 1$, $= 1$, < 1.



In definitive

$$d_\infty(f_n, f) = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = n^{p-1} \cdot \frac{1}{e}$$

e quindi

$d_\infty(f_n, f) \xrightarrow[n]{} 0$ solo nel caso $p<1$,

cioè la convergenza è uniforme solo nel caso $p<1$.

—

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

Sia $f_n : A \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni con $\|f_n\|_\infty \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Dimostrare che $\frac{f_n}{n} \xrightarrow[n]{} 0$ uniformemente.

Vale il reciproco?

Ris:

Devo vedere che $\|\frac{f_n}{n} - 0\|_\infty \xrightarrow[n]{} 0$, ed infatti

$$\|\frac{f_n}{n}\|_\infty = \frac{1}{n}\|f_n\|_\infty \leq \frac{M}{n} \xrightarrow[n]{} 0$$

Il reciproco è falso; basta infatti considerare $f_n(x) = \sqrt{n}$ $\forall x$. Si ha $\frac{f_n(x)}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n]{} 0$,

ma $\nexists M$ t.c. $\|f_n(x)\|_\infty = \|\sqrt{n}\|_\infty = \sqrt{n} \leq M$

COMPLETEZZA di $L^\infty(A)$

Ricordiamo che una successione $\{a_n\}$ di numeri reali si dice di Cauchy se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu = \nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n \geq \nu, \ m \geq \nu .$$

Ricordiamo che un risultato fondamentale che riguarda $\mathbb{R}$ dice

$$\{a_n\} \text{ di Cauchy } \Longleftrightarrow \{a_n\} \text{ è convergente}$$

Questo si esprimerà dicendo che $\mathbb{R}$ è completo (Anche $\mathbb{R}^k$ è completo). Vediamo un risultato analogo per L^∞. Dobbiamo innanzi tutto definire le successioni di Cauchy in L^∞.

DEFINIZIONE

$\{f_n\} \subset L^\infty(A)$ si dice (uniformemente) di Cauchy se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu = \nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\| f_n - f_m \|_\infty < \varepsilon \quad \forall n \geq \nu, \ m \geq \nu$$

Dimostriamo adesso che $L^\infty(A)$ è completo, cioè vale il seguente Teorema

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (criterio di Cauchy)

Sia $\{f_n\} \subset L^\infty(A)$. Allora

$\{f_n\}$ di Cauchy $\Longleftrightarrow$ $\{f_n\}$ converge uniformemente

dim:

$\Rightarrow$) supp. $\{f_n\}$ di Cauchy, cioè $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n, m > \nu$;

per definizione di $\| \, \|_\infty$, si ha che $|f_n(x) - f_m(x)| \overset{(*)}{<} \varepsilon$ $\forall n, m \geq \nu$ $\forall x \in A$ e quindi $\{f_n(x)\}$ è una successione di Cauchy di numeri reali. Ma $\mathbb{R}$ è completo, cioè una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ converge, e quindi $\exists f(x) = \lim_n f_n(x)$. Questo vale $\forall x$ e quindi definisce la funzione $f : A \to \mathbb{R}$. Basta adesso verificare che la convergenza è uniforme, cioè che $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n]{} 0$. Tenendo fisso n in $(*)$ e facendo $m \to +\infty$ si ottiene $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ $\forall n > \nu$ e $\forall x \in A$, che significa proprio $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n]{} 0$

$\Leftarrow$) supp. $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n]{} 0$. Sia $\varepsilon > 0$. Allora $\exists \nu$ t.c.

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 \quad \forall k > \nu \quad \forall x \in A$$

In particolare

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq$$

$$\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \forall n, m > \nu \quad \forall x \in A$$

e questo significa proprio $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n, m > \nu$

#

SERIE DI FUNZIONI

Introduciamo adesso il concetto di convergenza puntuale e uniforme per serie di funzioni

DEFINIZIONE Sia $\{f_n\} \subset L^\infty(A)$.

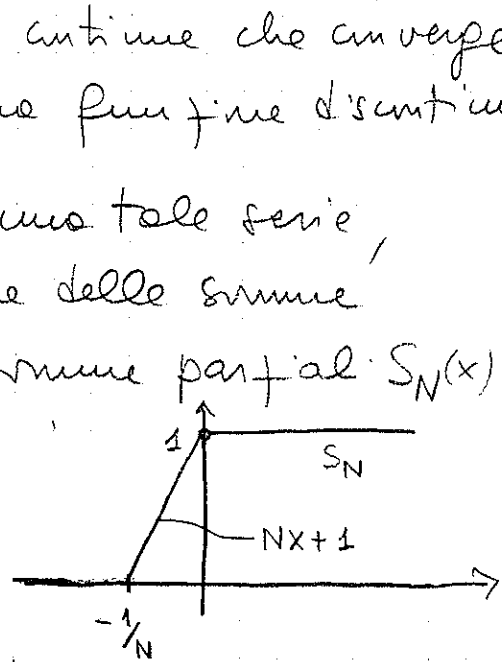
Diremo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente se la successione di funzioni $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ converge puntualmente

Diremo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente su A se la successione di funzioni $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ converge uniformemente su A

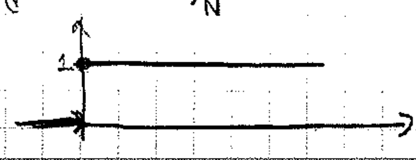
OSS:

così come il limite puntuale di una successione di funzioni continue può essere una funz. discontinua, così la somma di una serie di funzioni continue che converge solo puntualmente può essere una funzione discontinua.

Per fare un esempio e trovare una tale serie, conviene partire dalla successione delle somme parziali. Se consideriamo come somme parziali $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ le funzioni in figura,



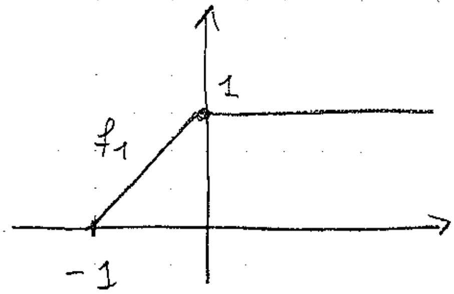
avremo che la somma $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è la funzione discontinua $H(x)$ di Heaviside, $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$



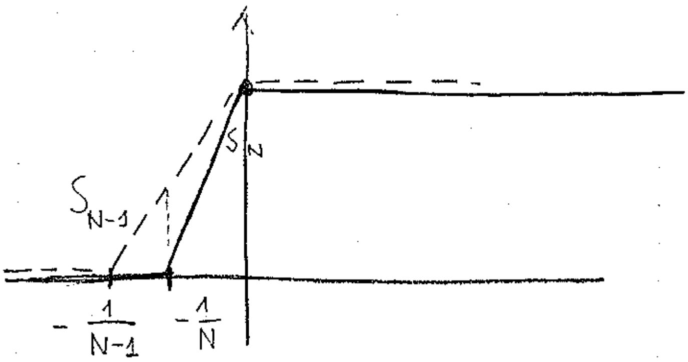
Per trovare adesso le funzioni $f_n(x)$ che danno $S_N(x)$ come in figura ricordiamo che

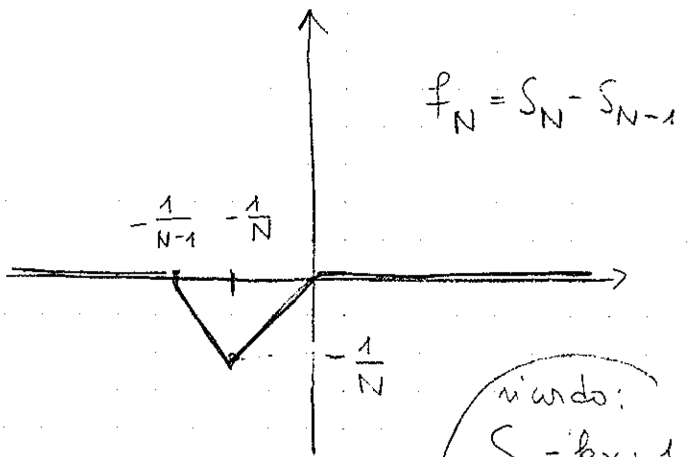
$$\underbrace{f_N(x)}_{N\geq 2} = S_N(x) - S_{N-1}(x) \quad , \quad f_1(x) = S_1(x) \; ;$$

quindi $f_1(x) = S_1(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ 1 & x \geq 0 \\ 1+x & -1 < x < 0 \end{cases}$



e per trovare $f_N(x)$, $N \geq 2$:





ricordo: $S_k = kx + 1$ in $\left[-\frac{1}{k}, 0\right]$

$$f_N(x) = \begin{cases} 0 & x < -\frac{1}{N-1} \\ 0 & x > 0 \\ -S_{N-1} = -(N-1)x - 1 & -\frac{1}{N-1} \leq x \leq -\frac{1}{N} \\ Nx + 1 - (N-1)x - 1 & -\frac{1}{N} \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & x < -\frac{1}{N-1} \; , \; x > 0 \\ -(N-1)x - 1 & -\frac{1}{N-1} \leq x \leq -\frac{1}{N} \\ x & -\frac{1}{N} \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Il Teorema che afferma che il limite uniforme di funzioni continue è una funzione continua, dà come corollario

COROLLARIO

la somma di una serie uniformemente convergente di funzioni continue è una funzione continua

OSS.

Si sa che una condizione necessaria, ma non sufficiente per la convergenza di una serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è che il suo termine generale $a_n \xrightarrow[n]{} 0$.

Un analogo risultato vale per la convergenza uniforme

NOTA BENE

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ converge uniformemente su } A \quad \begin{matrix} \Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow \end{matrix} \quad f_n \xrightarrow[n]{} 0 \text{ uniformemente su } A$$

dim:

$\Longrightarrow$) poiché S_N è uniformemente convergente, si ha che S_n è (uniformemente) di Cauchy, cioè in particolare $\| f_N \|_\infty = \| S_N - S_{N-1} \|_\infty \xrightarrow[n]{} 0$

$\not\Longleftarrow$) basta prendere $f_n(x) = \frac{1}{n} \quad \forall x \in A$. Si ha che

$\| f_n \|_\infty \xrightarrow[n]{} 0$ e quindi f_n converge uniformemente a zero su A, ma $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

#

Per le serie di funzioni, un criterio di convergenza molto utile è il seguente

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ $\boxed{\text{Test di Weierstraß}}$

$\{f_n\}$ successione di funzioni t.c. $|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in A$.

Allora $\qquad\qquad (\text{cioè } \|f_n\|_\infty \leq M_n)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty \quad \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ converge uniformemente}$$

nel senso che non è detto che $\exists M_n$ con $\|f\|_\infty \leq M_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$

dim:

$\Rightarrow$) Sia $\varepsilon > 0$.

Perchè $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$, $\exists \nu$ t.c. $\sum_{i=m}^{m} M_i \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq \nu$.

Quindi, perchè $\left|\sum_{i=n+1}^{m} f_i(x)\right| \leq \sum_{i=n+1}^{m} M_i \quad \forall x \in A$, segue immediatamente che la successione delle somme parziali $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ è (uniformemente) di Cauchy e quindi, per la completezza di L^∞, $S_n(x)$ converge uniformemente. Ma questo significa per definizione che $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è uniformemente convergente.

$\not\Leftarrow$) l'esempio che faremo è un po' laborioso. Consideriamo la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k}$, $x \in [0,1]$.

Osserviamo subito che non è applicabile il Test di Weierstraß, infatti:

$$\sup\left\{\left|(-1)^n \frac{x^n}{n}\right|,\ x\in[0,1]\right\} = \frac{1}{n} \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty .$$

Dimostriamo adesso che la serie converge uniformemente.

Abbiamo $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{x^n}{n}$; si ha

$$|S_N(x) - S_M(x)| = \left|\sum_{n=N+1}^{M} (-1)^n \frac{x^n}{n}\right| \leq \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}\right|$$

$$= \left|(-1)^{N+1}\frac{x^{N+1}}{N+1} + (-1)^{N+2}\frac{x^{N+2}}{N+2} + (-1)^{N+3}\frac{x^{N+3}}{N+3} + (-1)^{N+4}\frac{x^{N+4}}{N+4} + \dots\right| =$$

$$= \left|(-1)^{N+1}\underbrace{\left[\frac{x^{N+1}}{N+1} - \frac{x^{N+2}}{N+2}\right]}_{\geq 0} + (-1)^{N+3}\underbrace{\left[\frac{x^{N+3}}{N+3} - \frac{x^{N+4}}{N+4}\right]}_{\geq 0} + \dots\right| \leq$$

$$\leq \left(\frac{x^{N+1}}{N+1} - \frac{x^{N+2}}{N+2}\right) + \left(\frac{x^{N+3}}{N+3} - \frac{x^{N+4}}{N+4}\right) + \dots \leq \sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2}\right)$$

Poniamo $\varphi_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2}$. Si ha $\varphi'(x) = x^n - x^{n+1} = x^n(1-x) \geq 0$ $\boxed{x\in(0,1)}$ e quindi φ_n è crescente in $[0,1]$, da cui $\varphi_n(x) \leq \varphi_n(1) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$. Si ha quindi che $\forall x\in[0,1]$

$$|S_N(x) - S_M(x)| \leq \sum_{n=N}^{\infty}\varphi_n(x) \leq \sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \overset{\text{Telescopica}}{=} \lim_{\bar N\to+\infty}\left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{\bar N+1}\right) = \frac{1}{N+1}$$

cioè $S_N(x)$ è di Cauchy e quindi $S_N(x)$ converge uniformemente (grazie alla completezza di L^∞)

#

ESERCIZIO

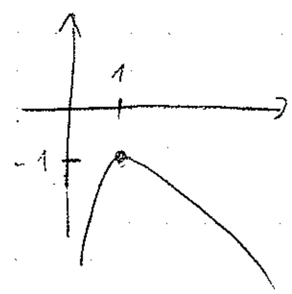
Dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx}$ $(x \geq 0)$ converge uniformemente in $[0,+\infty)$

<u>Ris</u>: il termine generale della serie e' $f_n(x) = x^n e^{-nx} =$
$= e^{n \lg x} e^{-nx} = e^{n(\lg x - x)}$.

Vedo se posso applicare il test di Weierstraß; cerco quindi di maggiorare $e^{n(\lg x - x)}$ con M_n t.c. $\sum M_n < +\infty$

Studio $\lg x - x = g(x)$ $\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} = 0 \iff x = 1$
MAX



$g(1) = \lg 1 - 1 = -1$

Quindi

$e^{n(\lg x - x)} \leq e^{n(-1)} = \frac{1}{e^n} = M_n$

Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} < +\infty$, avrò che la serie converge unif.

ESERCIZIO

Dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}$ converge uniformemente in ogni intervallo della forma $[0,a]$, $a \in \mathbb{R}$, $a>0$, ma non converge uniformemente in $[0,+\infty)$

<u>Ris</u>: $\frac{nx^2}{n^3+x^3} \leq \frac{na^2}{n^3} = \frac{a^2}{n^2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^2}{n^2} < +\infty$
$\downarrow$
$x \in [0,a]$ quindi, grazie al test di

Weierstraß la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^2}{n^3+x^3}$ converge uniformemente in $[0,a]$.

Per vedere che però non converge uniform. in $[0,+\infty)$ dimostro che il termine generale non tende uniformemente a zero in $[0,+\infty)$ (cond. ne necessaria). Infatti in $L^\infty([0,+\infty))$ si ha

$$\|f_n\|_\infty = \left\| \frac{n x^2}{n^3+x^3} \right\|_\infty = \sup\left\{ \frac{n x^2}{n^3+x^3},\ x \in [0,+\infty) \right\} \geq$$

$$\geq \frac{n\, n^2}{n^3+n^3} = \frac{1}{2} \underset{n}{\not\to} 0$$

prendo $x = n$

<u>OSS</u>: qui non ho calcolato il sup $f_n(x)$ perché non era necessario; nel caso non tendo a zero basta minorarlo con qualcosa che non tende a zero (a volte ci sono punti "facili" in cui calcolare f_n, che risolvono il problema; ad esempio qui $x = n$).
In questo caso il conto era comunque fattibile

$$f_n(x) = \frac{n x^2}{n^3+x^3}, \quad f_n'(x) = \frac{2nx(n^3+x^3) - nx^2 \cdot 3x^2}{(n^3+x^3)^2} = \frac{2n^4 x - n x^4}{(n^3+x^3)^2} =$$

$$= \frac{nx}{(n^3+x^3)^2}(2n^3 - x^3) = 0 \iff x = \sqrt[3]{2}\, n$$

Ora $f_n(\sqrt[3]{2} \cdot n) = \frac{n \sqrt[3]{4}\, n^2}{n^3 + 2n^3} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$

Quindi $\|f_n(x)\|_\infty = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \underset{n}{\not\to} 0$

Vedremo più avanti di approfondire l'argomento della convergenza uniforme delle serie di funz. nei considerando in particolare le serie di potenze.
Adesso ci occuperemo invece di

CONVERGENZA UNIFORME E INTEGRAZIONE

Si verifica facilmente (e noiosamente) che il limite uniforme di funz integrabili è integrabile(*); più interess. è il

TEOREMA (condizione sufficiente per lo scambio tra le operazioni di limite ed integrazione)

$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, convergenti uniformemente ad f.
Allora

$$\lim_n \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_n f_n(x)\,dx$$

dim:

poiché la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente, sappiamo che f è continua e quindi integrabile. Inoltre

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq$$

$$\leq \| f_n - f \|_\infty \cdot (b-a) < \varepsilon \cdot (b-a)$$

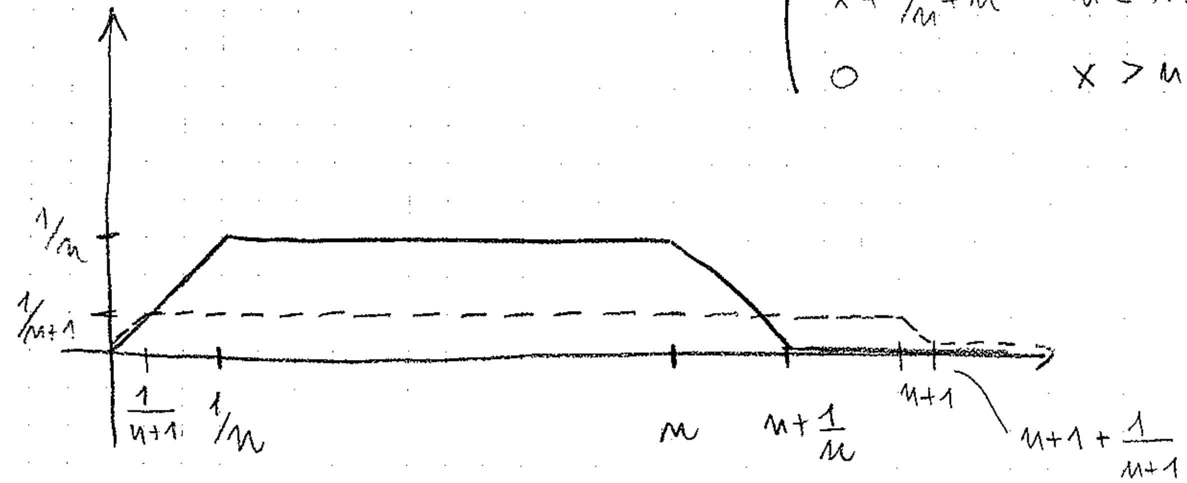
$$\forall n \geq \nu_\varepsilon$$

*

(*) si possono vedere i conti alla fine delle note

<u>OSS:</u> il teorema non è vero in generale se il dominio è illimitato. Facciamo un esempio: consideriamo

$f_n : [0,+\infty) \Rightarrow \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 1/n & 1/n < x \le n \\ -x + 1/n + n & n < x \le n + \frac{1}{n} \\ 0 & x > n + \frac{1}{n} \end{cases}$



Si ha $f_n(x) \xrightarrow[n]{} 0 \quad \forall x$, $\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n} \xrightarrow[n]{} 0$ e quindi la convergenza è uniforme. Però

$$\lim_n \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \lim_n \left(\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n}\left(n - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} \right) = 1 \neq 0 = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

— · —

Vediamo ora un teorema che lega serie di funzioni ed integrali (anche questo dà una condizione di passaggio al limite sotto il segno integrale)

TEOREMA

$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ unif. convergente in $[a,b]$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx$$

dim:

innanzitutto, poiché le f_n sono continue e la convergenza è uniforme, si ha che $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è continua e quindi integrabile. Inoltre

$$\left| \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx - \sum_{n=1}^{N} \int_a^b f_n(x)\,dx \right| =$$

$$= \left| \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx - \int_a^b \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\,dx \right| =$$

$$= \left| \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right) dx \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right| dx \leq$$

$$= \int_a^b \left| S(x) - S_N(x) \right| dx \leq \| S - S_N \|_{\infty} \cdot (b-a) \leq$$

$$\leq \varepsilon \cdot (b-a)$$

$\downarrow$ $n \geq \nu_\varepsilon$

#

Vediamo ora come esercizio di capire quando, per le funzioni $f_n(x) = n^p x e^{-nx}$, $p>0$, $x \in [0,1]$, vale il passaggio al limite sotto il segno integrale. Ricordo che avevamo

$$f_n(x) = n^p x e^{-nx} \xrightarrow[n]{} 0$$ e che la convergenza era uniforme solo per $0<p<1$

Il teorema sul passaggio al limite sotto il segno integrale ci viene in aiuto quindi solo nel caso $0<p<1$, dandoci la sicurezza che

$$\lim_n \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = 0\,.$$

Per $p>1$ dobbiamo fare il conto diretto.

$$\lim_n \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_n \int_0^1 n^p x e^{-nx} = \text{ Per parti}$$

$$= \lim_n n^p \left\{ -\frac{1}{n} x e^{-nx} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{n} e^{-nx} \right\} =$$

$$= \lim_n n^p \left\{ -\frac{1}{n} e^{-n} - \frac{1}{n^2} e^{-nx} \Big|_0^1 \right\} =$$

$$= \lim_n n^p \left\{ -\frac{1}{ne^n} - \frac{1}{n^2 e^n} + \frac{1}{n^2} \right\} =$$

$$= \lim_n \left\{ -\frac{n^{p-1}}{e^n} - \frac{n^{p-2}}{e^n} + n^{p-2} \right\} = 0 \quad \left(= \int_0^1 f(x)\,dx \right)$$

$$\Downarrow$$

$$p-2<0$$

$$p<2$$

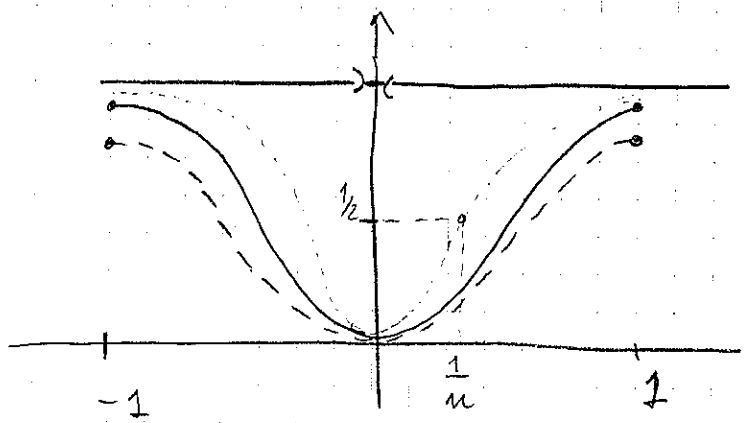
Quindi per $p<2$ vale

$$\lim_n \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx \qquad \#$$

ESERCIZIO

Sia $f_n(x) = \dfrac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$, $x \in [-1,1]$. Trovare $f(x) = \lim_n f_n(x)$ e dimostrare che la convergenza non è uniforme. Mostrare che tuttavia

$$\lim_n \int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \lim_n f_n(x)\,dx$$



$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$

Ris

osserviamo che

$$f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2} = 1 - \frac{1}{1+n^2x^2}$$

$f_n(0) = 0 \ \forall n$ e $\begin{cases} \lim_n f_n(x) = 1 \\ \forall x \neq 0 \end{cases}$

e quindi

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$$

la convergenza non può essere uniforme perché $f(x)$ non è continua;

si può vedere anche direttamente, infatti:

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| \geq \left|f_n\left(\tfrac{1}{n}\right) - f\left(\tfrac{1}{n}\right)\right| = 1/2 \ \underset{n}{\not\to}\ 0$$

(studiare le funzioni f_n per esercizio e trovare il sup(*))

Ora $\int_{-1}^{1} \lim_n f_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2$, ed anche

$$\lim_n \int_{-1}^{1} \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}\,dx = \lim_n \int_{-1}^{1}\left(1 - \frac{1}{1+n^2x^2}\right)dx = 2 - \lim_n \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+n^2x^2} =$$

$$= 2 - \lim_n \frac{1}{n} \operatorname{arctg}(nx)\Big|_{-1}^{1} = 2 - \lim_n 2\,\frac{\operatorname{arctg} n}{n} = 2.$$

((*) $\sup|f_n(x) - f(x)| = \sup\left|\dfrac{1}{1+n^2x^2}\right| = 1$)

CONVERGENZA UNIFORME E DERIVAZIONE

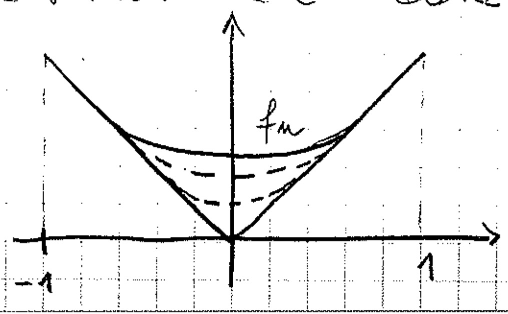
Abbiamo visto all'inizio che la convergenza puntuale di funzioni derivabili non è affatto detto che sia una funzione derivabile (non è assicurata nemmeno la continuità della funzione limite).

Anche nel caso in cui la convergenza sia uniforme, la derivabilità del limite non è assicurata. Non è assicurata neppure se le funzioni f_n sono C^1. Riassumendo

$$\left.\begin{array}{l} f_n \text{ derivabili} \\ f_n \xrightarrow[n]{} f \\ \text{uniformemente} \end{array}\right\} \not\Rightarrow f \text{ è derivabile}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_n \text{ derivabili con} \\ \quad \text{derivata continua} \\ f_n \xrightarrow[n]{} f \\ \text{uniformemente} \end{array}\right\} \not\Rightarrow f \text{ è derivabile}$$

Basta ad esempio considerare la successione C^1 data in figura, convergente uniformemente alla funzione non derivabile $|X|$



Ma vediamo un risultato in positivo.

Poiché derivando si fa un limite, anche io posso un teorema riguardo lo scambio tra due operazioni di limite (quello della derivazione e quello della successione)

$$\lim_n f'_n(x) = \left(\lim_n f_n(x)\right)'$$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$

$f_n \in C^1[a,b]$, $f_n(x) \xrightarrow[n]{} f(x)$ puntualmente $\forall x \in [a,b]$

$f'_n(x) \xrightarrow[n]{} g(x)$ uniformemente in $[a,b]$

Allora $f \in C^1[a,b]$ ed $f'(x) = g(x)$ $\forall x \in [a,b]$

dim: da un teorema visto precedentemente si ha che (la conv. di f'_n a g è uniforme)

$$\lim_n \int_a^x f'_n(t)\,dt = \int_a^x g(t)\,dt \qquad \forall x \in [a,b]$$

D'altra parte

$$\lim_n \int_a^x f'_n(t)\,dt = \lim_n \left[f_n(x) - f_n(a)\right] = f(x) - f(a)$$

e quindi

$\int_a^x g(t)\,dt = f(x) - f(a)$; derivando si ottiene $g(x) = f'(x)$

e la f' è continua perché limite uniforme di continue

$\#$

<u>OSS</u>: dalle ipotesi del teorema precedente si ha che $f_n \to f$ anche uniformemente in $[a,b]$

Infatti

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \int_a^x [f_n'(t) - f'(t)]\,dt + f_n(a) - f(a) \right| \leq$$

$$\leq \|f_n' - f'\|_\infty \cdot (b-a) + |f_n(a) - f(a)|$$

Ora, poiché $f_n' \xrightarrow[n]{} f'$ uniformemente, $\forall \varepsilon\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.c. $\|f_n' - f'\|_\infty < \varepsilon$ $\forall n \geq n_\varepsilon$ e poiché $f_n(a) \xrightarrow[n]{} f(a)$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \overline{n}_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.c. $|f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$ $\forall n \geq \overline{n}_\varepsilon$.

Quindi si prende $\nu_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, \overline{n}_\varepsilon\}$ e si ottiene

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \cdot (b-a) + \varepsilon \qquad \forall n \geq \nu_\varepsilon \quad \forall x \in [a,b]$$

$\#$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

Sia $f_n(x) = \frac{1}{x^n}$, $x \in [1, +\infty)$. Studiare la convergenza di f_n ed f_n'.

<u>Ris</u>:

Vediamo innanzitutto di calcolare $f(x) = \lim_n f_n(x)$.

Si ha

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$; la funzione limite è discontinua in $[1,+\infty)$

e quindi la convergenza non può essere uniforme. Osserviamo già che, grazie all'osserv. precedente, anche se esistesse $g(x) = \lim_n f_n'(x)$, tale convergenza non potrebbe essere uniforme, perchè se lo fosse si avrebbe anche la convergenza uniforme delle f_n. Ma cerchiamo $g(x)$. Si ha

$f_n'(x) = -n \frac{1}{x^{n+1}}$ e quindi $g(x) = \begin{cases} -\infty & x = 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$

Vediamo che però $f_n' \to g$ uniformemente in $[a,+\infty)$ $\forall a > 1$, infatti

$$\| f_n' - g \|_{L^\infty([a,+\infty))} = \sup\{ |f_n'(x) - g(x)| , x \in [a,+\infty) \} =$$

$$= \sup\{ |f_n'(x)| , x \in [a,+\infty) \} = -\frac{n}{a^n} \xrightarrow[n]{} 0$$

Allora il teorema ci assicura che $f \in C^1[a,+\infty)$ e vale $f'(x) = g(x)$ $\forall x \in [a,+\infty)$ $\forall a > 1$

L'osservazione fatta precedentemente ci assicura che anche la convergenza di f_n ad è uniforme in $[a,+\infty)$. Chiaramente poi non occorreva scomodare risultati così generali per ottenere le informazioni desiderate; anche il fatto che $f_n \to f$ unif. in $[a,+\infty)$ è semplice da dimostrare:

$$\| f_n - f \|_{L^\infty([a,+\infty))} = \sup\{ \frac{1}{x^n} , x \in [a,+\infty) \} \le \frac{1}{a^n} \xrightarrow[n]{} 0$$

CONVERGENZA UNIFORME E SERIE DI POTENZE

Prima di enunciare il teorema fondamentale di convergenza uniforme per le serie di potenze, vediamo una formula ed un criterio di convergenza che ci serviranno per la sua dimostrazione.

FORMULA DI ABEL

Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ successioni di numeri reali. Sia

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Allora

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n \cdot b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1})$$

dim:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + \sum_{k=2}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k =$$

$$= a_1 b_1 + \sum_{k=2}^{n} A_k b_k - \sum_{k=2}^{n} A_{k-1} b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=2}^{n} A_{k-1} b_k =$$

$a_1 = A_1$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} + A_n b_{n+1} =$$

$$= A_n \cdot b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1})$$

#

COROLLARIO | CRITERIO DI DIRICHLET

Se le somme parziali della serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sono limitate

e se $\{b_n\}$ è una successione monotona decrescente a zero,

allora
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \in \mathbb{R}$$

(il caso speciale $a_k = (-1)^k$ è il Criterio di Leibniz)

dim:

Sia $M \in \mathbb{R}$ t.c. $|A_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq M$. Allora

nella formula di Abel l'addendo $A_n b_{n+1} \xrightarrow[n]{} 0$.

Sempre grazie alla formula d'Abel, basterà dimostrare

che $\sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$ è convergente. Ed infatti

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})\right| \leq M \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| =$$

decrescenza d' b_n

$$= M \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) =$$

$$= M \lim_{N} (b_1 - b_{N+1}) = M b_1$$

la formula d'Abel ci dice quindi che
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n b_n \in \mathbb{R}$$

#

Possiamo ora enunciare il seguente

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (convergenza uniforme delle serie di potenze)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \text{ converge in } x_0 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \text{ converge uniformemente}$$

in $[0, x_0]$ se $x_0 > 0$

in $[x_0, 0]$ se $x_0 < 0$

dim:

Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ converge in x_0, significa che $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k x_0^k \right| < \varepsilon \quad \forall p > 0 .$$

Ora, tenuto conto che $1 > \frac{x}{x_0} > \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 > \left(\frac{x}{x_0}\right)^3 > \quad \forall x \in (0, x_0)$, dalla formula di Abel si ha che, posto $A_i = \sum_{k=n}^{i} a_k x_0^k$

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k x^k \right| = \left| \sum_{k=n}^{n+p} \underbrace{a_k x_0^k} \underbrace{\left(\frac{x}{x_0}\right)^k} \right| =$$

$$= |A_{n+p}| \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+p+1} + \sum_{k=n}^{n+p} |A_{n+k-1}| \Bigg[\underbrace{\left(\frac{x}{x_0}\right)^k - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{k+1}}_{>0} \Bigg] <$$

$$< \varepsilon \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+p+1} + \varepsilon \sum_{k=n}^{n+p} \left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^k - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{k+1} \right] =$$

$$= \varepsilon \left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+p+1} + \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n} - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+p+1} \right] = \varepsilon \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n} < \varepsilon \quad \begin{matrix} \forall p > 0 \\ \forall x \in (0, x_0) \end{matrix}$$

Allora la successione delle somme parziali è (uniformemente) di Cauchy e quindi è uniformemente convergente.

#

APPLICAZIONE

Ricordiamo che $\lg(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \forall x \in (-1,1)$

Possiamo adesso dimostrare che

$$\lg 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} .$$

Grazie al teorema precedente abbiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ converge uniformemente in $[0,1]$ (perché $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ converge in $x_0 = 1$, grazie al criterio di Leibniz)

Ma se la serie converge uniformemente si ha che la somma è una funzione continua in 1. Abbiamo allora

$$\left.\begin{array}{l} \lg(1+x) \text{ continua in } [0,1] \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \text{ continua in } [0,1] \\ \lg(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \forall x \in [0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \lg(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \forall x \in [0,1]$$

(la dimostrazione di questo fatto si poteva fare senza l'uso di questo teorema con una laboriosa maggiorazione e minorazione di $\lg(1+x)$: $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots - \frac{x^n}{n} < \lg(1+x) < x - \frac{x^2}{2} \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ecc; l'unif. converg. di $\sum (-1)^n \frac{x^n}{n}$ era già stata fatta con un lungo conto)

ESERCIZIO

Studiare la convergenza semplice, assoluta e uniforme della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

Ris $\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{\sqrt{n}}} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n]{} |x|<1$ converge assolutamente

$|x|>1$ non converge

$x=1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$ (serie armonica generalizzata)

$x=-1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \in \mathbb{R}$ (per Leibniz: $\frac{1}{\sqrt{n}} \downarrow^n 0$)

Per cui $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ converge assolutamente in $(-1,1)$, semplicemente per $x=-1$. Vediamo la convergenza uniforme. Per il teorema precedente la convergenza è uniforme in $[-1,0]$. Poi, se $x \in [0,a]$, $a<1$, dato che la serie converge in $x=a$, sempre il teorema precedente ci assicura l'uniforme convergenza in $[0,a]$

(Per $[0,a]$ bastava il test di Weierstraß:

$$\left|\frac{x^n}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{a^n}{\sqrt{n}} \quad e \quad \sum \frac{a^n}{\sqrt{n}} < +\infty \ )$$

In definitiva la convergenza è uniforme in $[-1,a]$, $\forall a<1$.

ESERCIZIO

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ serie di potenze con raggio di convergenza $+\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ non polinomio (cioè non somma finita). Dimostrare che allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ non può convergere uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.

Rs:

se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ non è un polinomio, significa che $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists m > n$ con $a_m \neq 0$ e quindi $\sup \{ |a_m x^m| : x \in \mathbb{R} \} = +\infty$ e quindi $\| f_n \| \underset{n}{\not\to} 0$ uniformemente.

#

↓

OSS:

grazie al teorema precedente si ha però convergenza uniforme in ogni intervallo del tipo

$[0, a]$ e $[-a, 0]$ $\forall a > 0$

NOTA FINALE 1

Avevamo detto, quando si parlava di convergenza uniforme ed integrazione, che

$$\left.\begin{array}{l} f_n \text{ integrabile in } [a,b] \\ f_n \xrightarrow[n]{} f \text{ unif. in } [a,b] \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ è integrabile su } [a,b],$$

senza però dimostrarlo. Vediamolo adesso.
Ricordiamo innanzitutto una caratterizzazione utile dell'integrabilità:

$$\begin{array}{l} \varphi \text{ integrabile} \\ \text{in } [a,b] \end{array} \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists\, S_\varepsilon \le \varphi \le T_\varepsilon \text{ t.c. } \int_a^b T_\varepsilon - \int_a^b S_\varepsilon \le \varepsilon$$

(S_ε, T_ε funzioni a scala)

Nel nostro caso dobbiamo quindi dimostrare, $\forall \varepsilon>0$, l'esistenza di due funzioni a scala S_ε, T_ε t.c.

$$S_\varepsilon \le f \le T_\varepsilon, \quad \int_a^b T_\varepsilon - \int_a^b S_\varepsilon \le \varepsilon,$$

dove $f = \lim_n f_n$ (limite uniforme).

Sia $\varepsilon>0$ fissato. Poiché $f_n \to f$ uniformemente avrò che $\forall \beta>0$ $\exists n_\beta$ t.c. $|f_{n_\beta}(x) - f(x)| < \beta$ $\forall x \in [a,b]$, cioè

$$f_{M_\beta}(x)-\beta \le f(x) \le f_{M_\beta}(x)+\beta \qquad \forall x\in[a,b]$$

Poiché $f_{M_\beta}(x)$ è integrabile, esisteranno due funzioni a scala S_β, T_β tali che

$$S_\beta(x) \le f_{M_\beta}(x) \le T_\beta(x) \quad \forall x\in[a,b], \qquad \int_a^b T_\beta - \int_a^b S_\beta \le \beta$$

Allora si avrà

$$\underbrace{S_\beta(x)-\beta} \le f_{M_\beta}(x)-\beta \le f(x) \le f_{M_\beta}(x)+\beta \le \underbrace{T_\beta(x)+\beta}$$

e

$$\int_a^b (T_\beta+\beta) - \int_a^b (S_\beta-\beta) = \int_a^b T_\beta - \int_a^b S_\beta + \int_a^b 2\beta \le$$

$$\le \beta + 2\beta(b-a)$$

L'integrabilità di f segue ora prendendo β t.c.

$\beta+2\beta(b-a)=\varepsilon$, cioè $\beta=\dfrac{\varepsilon}{1+2(b-a)}$ e

$S_\varepsilon = S_\beta-\beta$, $T_\varepsilon = T_\beta+\beta$; infatti così

$S_\varepsilon \le f \le T_\varepsilon$ e $\displaystyle\int_a^b T_\varepsilon - \int_a^b S_\varepsilon \le \varepsilon$ #

NOTA FINALE 2

Tra le prime cose che abbiamo osservato è che la convergenza puntuale di una successione $\{f_n\}$ di funzioni continue non è sufficiente a garantire la continuità del limite f. Nel caso invece che la convergenza sia uniforme la funzione limite è continua. Non è vero però che, se la funzione limite è continua, la convergenza sia uniforme.

Vediamo però una situazione particolare in cui la convergenza puntuale implica la convergenza uniforme

TEOREMA (Dini)

A compatto, $f_n : A \to \mathbb{R}$ continue.
Supponiamo che $\forall x \in A$ la successione numerica $\{f_n(x)\}$ sia decrescente e che la funzione $f(x) = \lim_n f_n(x)$ sia continua

Allora

$$f_n \xrightarrow[n]{} f \quad \text{uniformemente.}$$

Dim:

Posto $g_n = f_n - f$, si tratta di dimostrare che $g_n \xrightarrow[n]{} 0$ uniformemente. Per il Teorema di Weierstraß la funzione ha un punto $x_n \in A$ di massimo e quindi $\|g_n\|_\infty = g_n(x_n)$. Basterà quindi dimostrare che $g_n(x_n) \xrightarrow[n]{} 0$. Osserviamo innanzitutto che la successione $g_n(x_n)$ è decrescente, cioè

$$g_n(x_n) \geq g_{n+1}(x_{n+1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Infatti

$$g_n(x_n) \underset{\substack{\downarrow \\ x_n \text{ è pto di} \\ \max \text{ per } g_n}}{\geq} g_n(x_{n+1}) \underset{\substack{\downarrow \\ g_n > g_{n+1}}}{\geq} g_{n+1}(x_{n+1})$$

Quindi $\exists\, L = \lim_n g_n(x_n)$. Resta da vedere che $L = 0$.

Supponiamo per assurdo che sia $L > 0$ e quindi che $g_n(x_n) \geq L > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Poiché A è compatto, dalla successione $\{x_n\}$ è possibile estrarre una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente ad un punto $x_0 \in A$; si ha

$$\begin{cases} g_{n_k}(x_{n_k}) \geq L > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ g_{n_k}(x_0) = f_{n_k}(x_0) - f(x_0) \xrightarrow[k]{} 0 \end{cases}$$

Vediamo come, dall'aver supposto $L > 0$, si arrivi ad una contraddizione. Poiché $g_{n_k}(x) \geq g_{n_{k+h}}(x) \quad \forall x \in A$, in particolare si ha

$$g_{n_k}(x_{n_{k+h}}) \geq g_{n_{k+h}}(x_{n_{k+h}}) \geq L \quad \forall h, k \in \mathbb{N}$$

e quindi

$$g_{n_k}(x_0) = \lim_h g_{n_k}(x_{n_{k+h}}) \geq L, \text{ assurdo.}$$

#