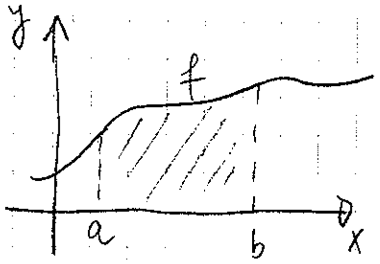
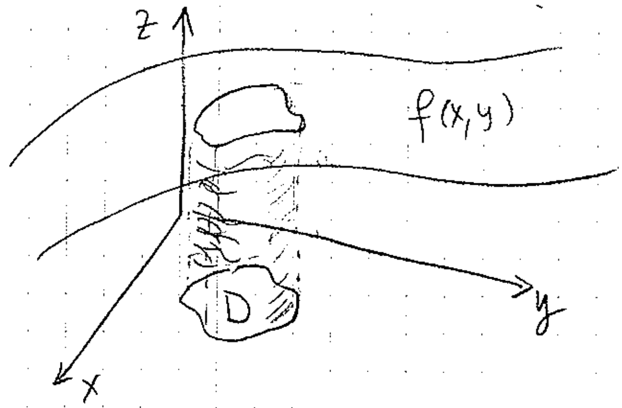
INTEGRALI DI LINEA

UNO-FORME DIFFERENZIALI

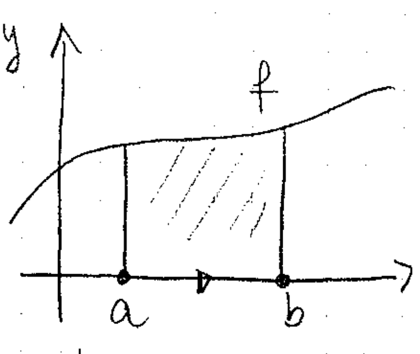
Il passaggio naturale, per quanto riguarda l'integrazione, da una variabile a più variabili, è sicuramente il seguente

$$\int_a^b f(x)\,dx \longrightarrow \iint_{D\subset\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy$$

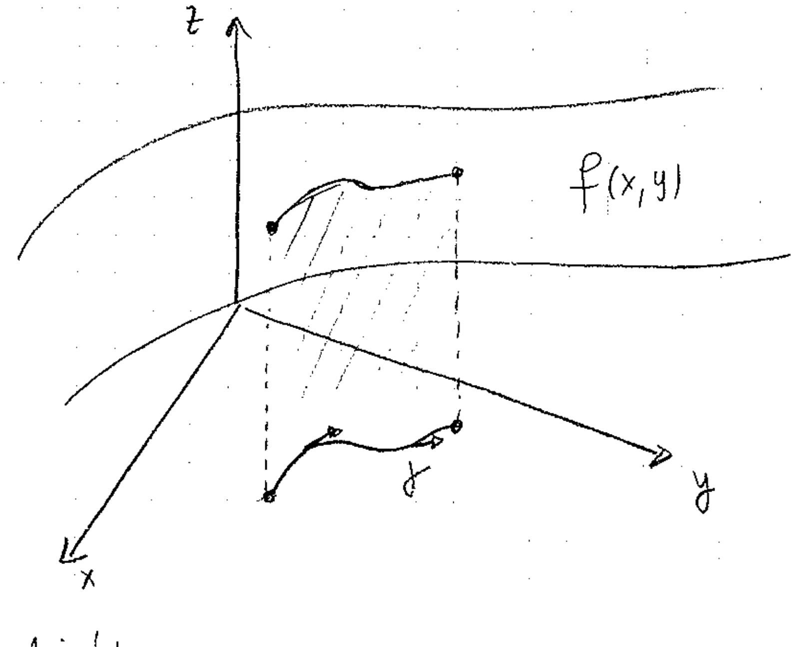




Di questo parleremo molto più avanti.
Ma proviamo a cambiare punto di vista.
In $\mathbb{R}$ si può camminare in un'unica direzione, a meno del verso, mentre in $\mathbb{R}^2$ i cammini sono infiniti: sembra quindi naturale dare un senso all'integrale lungo un qualunque cammino, cioè lungo una curva



$$\int_a^b f(x)\,dx \longrightarrow \int_\gamma f\,ds$$



Ci occuperemo quindi di

INTEGRAZIONE LUNGO CURVE

Non starò a ripetere la teoria già fatta sulle curve: noi considereremo in questa parte del corso <u>curve regolari</u> in $\mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^k)$ <u>semplici</u>, cioè applicazioni

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

$x(t)$, $y(t)$ funzioni derivabili con derivata continua

$$\gamma'(t) \neq (0,0) \quad \forall t \in [a,b] \quad (*)$$

e tali che, comunque presi due punti $t_1, t_2 \in [a,b]$, di cui almeno uno in (a,b), risulti $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$.

(Si noti che una curva semplice può essere chiusa.)

Il vettore unitario $T_\gamma(t_0) = \dfrac{(x'(t_0), y'(t_0))}{\sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}} = \dfrac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|}$

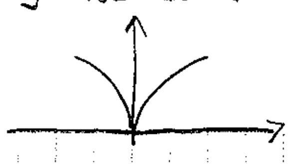
si chiama <u>versore tangente</u> alla curva nel punto $(x(t_0), y(t_0))$, mentre il vettore $\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ si chiama <u>vettore velocità</u>

- Ricordiamo che la <u>curva opposta</u> della curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ è definita come

$$(-\gamma)(t) = \gamma(-t) = (x(-t), y(-t)) \qquad t \in [-b, -a]$$

(*) questa condizione è necessaria per la regolarità. Ad esempio $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, $t \in [-1,1]$ ha le componenti C^1 ma descrive una cuspide!!

$x(t) = t^2$, $y(t) = t^3$



$y = |x|^{3/2}$

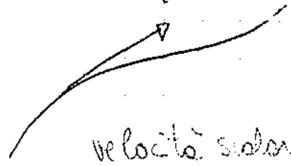
Possiamo ora definire l'integrale di una funzione $f(x,y)$ lungo una curva $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ (in maniera del tutto analoga si potrà definire l'integrale di una funzione $f(x_1,\dots,x_n)$ lungo una curva $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$).

DEFINIZIONE

$$\int_\gamma f\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\,|\gamma'(t)|\,dt =$$

$$= \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$

$ds = |\gamma'(t)|\,dt$



velocità scalare $= \frac{ds}{dt}$

OSS:

Nel caso di $\int_a^b f(x)\,dx$, se $f\equiv 1$, si ottiene la lunghezza dell'intervallo $\left(\int_a^b dx = b-a\right)$. Analogamente nel caso di

$\int_\gamma f\,d\sigma$, se $f\equiv 1$, si ottiene la lunghezza della curva $\left(\int_\gamma d\sigma = \ell(\gamma)\right)$. Si ha quindi

$$(*)\qquad \boxed{\ell(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt}$$

Usualmente la lunghezza di una curva è definita come il sup delle lunghezze delle poligonali inscritte nella stessa, ma se la curva è regolare le due quantità coincidono. La lunghezza in (*) si può vedere anche da un punto di vista fisico, attribuendo al parametro t il significato del tempo. Infatti, ricordando che la velocità è il rapporto tra spazio e tempo ($v = \frac{ds}{dt}$), risulta naturale pensare che lo spazio percorso (lunghezza di γ) si possa ottenere integrando la velocità scalare (il modulo del vettore velocità) rispetto al tempo, cioè

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

<u>NOTA</u>: se la curva è un grafico, cioè

$$\gamma(t) = (t, g(t)) \quad , \quad t \in [a,b] \, ,$$

l'integrale lungo tale curva è dato da

$$\int_a^b f(t, g(t)) \sqrt{1 + g'^2(t)}\, dt \, .$$

In particolare $\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + g'^2(t)}\, dt$

<u>OSS</u>: la lunghezza d'una curva non dipende dalla sua parametrizzazione

<u>ESERCIZIO</u>:

Calcolare la lunghezza della semicirconferenza $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, sia vedendo la curva parametrizzata in polari, sia come grafico.

Sappiamo di doverci aspettare $\ell(\gamma) = 2\pi$.

<u>RIS</u>:

i) <u>in polari</u>: $\gamma(t) = (2\cos t,\ 2\,\mathrm{sen}\,t)$ $\quad t \in [0, \pi]$

$$\ell(\gamma) = \int_0^{\pi} |\gamma'(t)|^2\, dt = \int_0^{\pi} |(-2\,\mathrm{sen}\,t,\ 2\cos t)|\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{4\,\mathrm{sen}^2 t + 4\cos^2 t}\ dt = 2\int_0^{\pi} dt = 2\pi$$

ii) <u>come grafico</u>: $\quad g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $\quad x \in [-2, 2]$

$$g'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} \qquad 1 + g'^2(x) = 1 + \frac{x^2}{4-x^2} = \frac{4}{4-x^2}$$

e quindi $\displaystyle \ell(\gamma) = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + g'^2(x)}\, dx = \int_{-2}^{2} \sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\, dx =$

$$= 4\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \underset{\substack{x = 2\cos t \\ dx = -2\,\mathrm{sen}\,t}}{=} 4\int_{\pi/2}^{0} \frac{-2\,\mathrm{sen}\,t\, dt}{\sqrt{4 - 4\cos^2 t}} = -8\int_{\pi/2}^{0} \frac{\mathrm{sen}\,t}{2\,\mathrm{sen}\,t}\, dt =$$

$$= -8 \cdot \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{0} dt = -8 \cdot \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$$

<u>ESERCIZIO</u>.

Calcolare $\int_\gamma y\, ds$, dove γ è la curva cartesiana $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 6$

<u>R.S.</u>

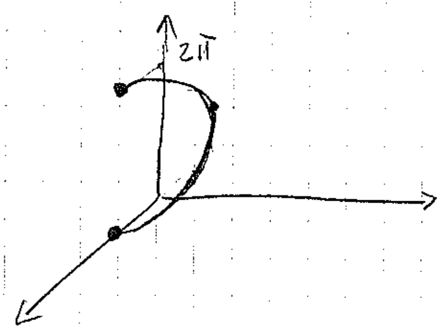
$\gamma(t) = (t, \sqrt{t})$, $t \in [0, 6]$, $\gamma'(t) = \left(1, \frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$ e quindi

$$\int_\gamma y\, ds = \int_0^6 \sqrt{t}\sqrt{1 + \frac{1}{4t}}\, dt = \int_0^6 \sqrt{t + 1/4}\, dt \underset{\sqrt{t + 1/4} = x}{=} \int_{1/2}^{5/2} x \cdot 2x\, dx = \frac{2x^3}{3}\Big|_{1/2}^{5/2} = \frac{31}{3}$$

Vediamo un esempio in $\mathbb{R}^3$

ESEMPIO:

Calcolare $\int_\gamma \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$ dove $\gamma = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$



Ris

$\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$ ristretta

a γ e' $\frac{1}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + t^2} = \frac{1}{1+t^2}$ e $\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$,

quindi

$$\int_\gamma \frac{ds}{x^2+y^2+z^2} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+t^2}\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}\, dt}{1+t^2} =$$

$$\sqrt{2} \operatorname{arctg} t \Big|_0^{2\pi} = \sqrt{2} \operatorname{arctg}(2\pi)$$

ESERCIZIO

Calcolare la lunghezza di $\gamma(t) = (t, \lg(1-t^2))$, $t \in [0, \frac{1}{2}]$

Ris:

$\gamma'(t) = (1, \frac{2t}{1-t^2})$ e quindi $|\gamma'(t)| = \sqrt{1 + \frac{4t^2}{(1-t^2)^2}} = \frac{t^2+1}{1-t^2}$.

Allora

$$\ell(\gamma) = \int_0^{1/2} \frac{t^2+1}{1-t^2}\, dt = \int_0^{1/2} \left(-1 - \frac{2}{t^2-1}\right) dt = -\tfrac{1}{2} - 2\int_0^{1/2} \frac{dt}{(t-1)(t+1)} =$$

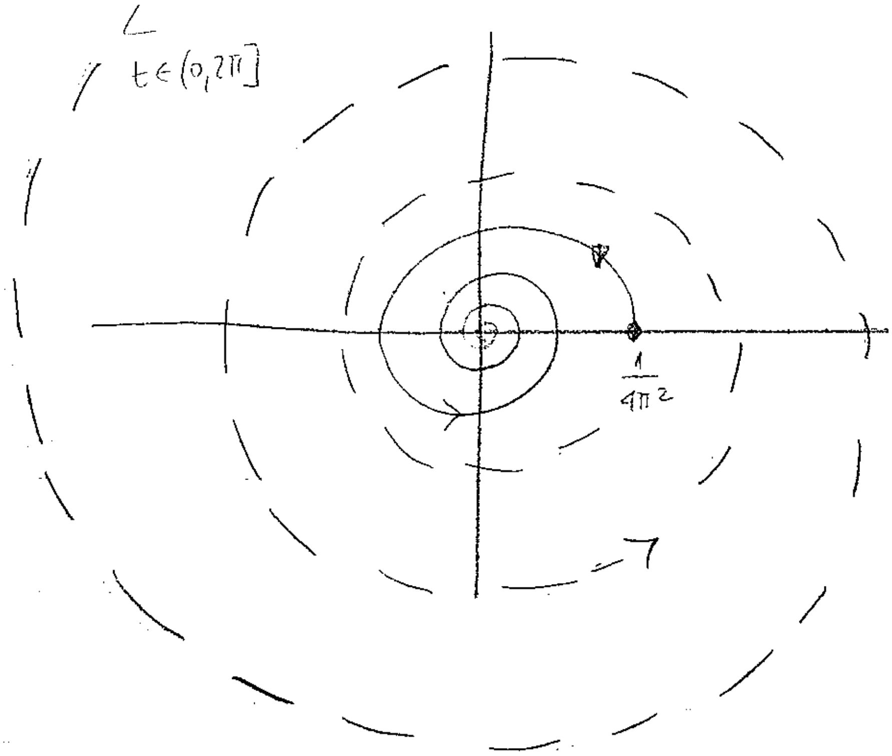
$$= -\tfrac{1}{2} - \lg \tfrac{1}{2} + \lg \tfrac{3}{2} = \lg 3 - \tfrac{1}{2}$$

ESERCIZIO 8: LUNGHEZZA FINITA O NO?!

$\boxed{\text{lunghezza della curva } \gamma(t) = \left(\frac{1}{t^2}\cos t, \frac{1}{t^2}\operatorname{sen} t\right) \quad t \in [2\pi, +\infty)}$

facciamo prima un disegno

$\gamma(2\pi) = \left(\frac{1}{4\pi^2}, 0\right)$



se consideriamo la curva anche per $t \in (0, 2\pi]$

se la consideriamo per $t \in (-\infty, 0)$ avremo la stessa curva percorsa in senso inverso che è simmetrica rispetto...

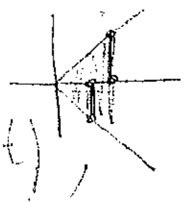
$$\ell(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_{2\pi}^{+\infty} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt = \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^3} \sim \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{1}{t^2} < +\infty$$

$x'(t) = -\frac{1}{t^3}\cos t - \frac{1}{t^2}\operatorname{sen} t$

$y'(t) = -\frac{1}{t^3}\operatorname{sen} t + \frac{1}{t^2}\cos t$

$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sqrt{\frac{1}{t^6} + \frac{1}{t^4}} = \sqrt{\frac{1+t^2}{t^6}} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^3}$

⊙ il segmento che congiunge i punti di ascissa $1/2k$ e $1/2k+1$ ha lunghezza maggiore di $\frac{2}{2k+1}$ e sommando su k si ottiene una serie divergente
$\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} > \frac{2}{2k+1}$

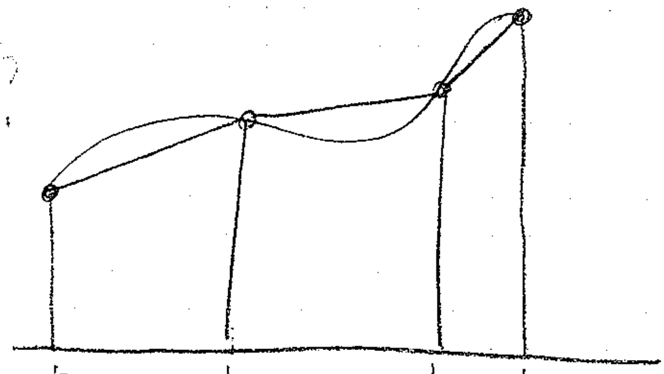


OSS: se consideravamo la curva $\gamma(t) = \left(\frac{1}{t}\cos t, \frac{1}{t}\operatorname{sen} t\right)$, $t \in [2\pi, +\infty)$ la lunghezza sarebbe stata infinita.
Altra curva di lunghezza infinita è $\gamma(t) = \left(t, t\cos\left(\frac{\pi}{t}\right)\right)$, $t \in (0, \pi]$, $\gamma(0) = (0,0)$. ⊙

OSSERVAZIONE sulla lunghezza d'una curva

DEF: $\ell(\gamma) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{N-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|,\ a = t_1 < t_2 < \cdots < t_N = b \right\}$

Come si arriva da ad $\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$?



Idea:

$$|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| =$$

$$= \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2} =$$

PITAGORA

Lagrange $t_i < \xi_i < t_{i+1}$, $t_i < \eta_i < t_{i+1}$

$$= \sqrt{x'^2(\xi_i)(t_{i+1} - t_i)^2 + y'^2(\eta_i)(t_{i+1} - t_i)^2} =$$

$$= \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i)}\ (t_{i+1} - t_i)$$

Quindi

$$\sum_{i=1}^{N-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| = \sum_{i=1}^{N-1} \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i)} \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

$$\Big\downarrow N \to +\infty$$

$$\int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$$

queste sono le somme di Riemann

$$\int_a^b f(t)\, dt = = \lim_{n} \sum_{i=1}^{n-1} f(\overline{t}_i)(t_{i+1} - t_i)$$

Diamo un paio di definizioni che coinvolgono integrali lungo curve. Tali curve saranno in $\mathbb{R}^2$, ma si possono dare analoghe definizioni in $\mathbb{R}^n$.

DEFINIZIONI:

il BARICENTRO $(\bar{x}, \bar{y})$ di una curva γ in $\mathbb{R}^2$ è definito come il punto di coordinate

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{1}{\ell(\gamma)} \int_\gamma x \, ds \, , \, \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_\gamma y \, ds \right)$$

il MOMENTO D'INERZIA di una curva γ in $\mathbb{R}^2$ rispetto al punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ è dato da

$$\int_\gamma |(x,y) - (x_0, y_0)|^2 \, ds$$

ESEMPIO:

Calcolare il baricentro dell'elica $\gamma(t) = (r\cos t, r \operatorname{sen} t, t)$ $t \in [0, 2\pi]$

R.S.:

$|\gamma'(t)| = \sqrt{1+r^2}$, quindi $\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+r^2} \, dt = 2\pi\sqrt{1+r^2}$

Il baricentro $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ è dato quindi da

$$\bar{x} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1+r^2}} \int_\gamma x \, ds = \frac{1}{2\pi\sqrt{1+r^2}} \int_0^{2\pi} r\cos t \sqrt{1+r^2} \, dt = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t \, dt = 0$$

analogamente $\bar{y}$ (perché viene $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \, dt = 0$). Resta $\bar{z}$:

$$\bar{z} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1+r^2}} \int_0^{2\pi} t \sqrt{1+r^2} \, dt = \frac{1}{2\pi} \frac{t^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = \pi \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, \pi)$$

ESEMPIO:

Calcolare il momento d'inerzia della curva $\gamma(t) = (1-t, t, 2t)$, $t \in [0,1]$, rispetto al punto $(0,0,0)$

Ris

devo calcolare $\displaystyle\int_\gamma |(x,y,z)-(0,0,0)|^2 ds =$

$$= \int_0^1 |(1-t, t, 2t)|^2 |\gamma'(t)| dt =$$

$$= \int_0^1 \left(\sqrt{(1-t)^2+t^2+4t^2}\right)^2 \sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}\ dt =$$

$$= \int_0^1 (6t^2-2t+1)\cdot\sqrt{6}\ dt = \sqrt{6}\left[2t^3-t^2+t\Big|_0^1\right] =$$

$$= \sqrt{6}\ (2-1+1) = 2\sqrt{6}$$

— —

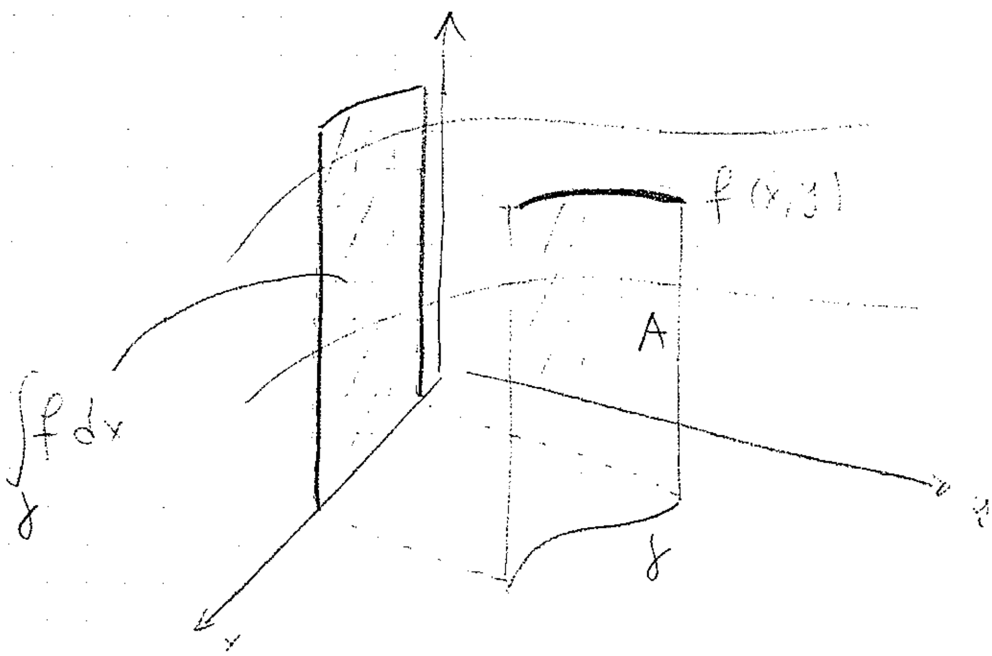
Consideriamo adesso degli integrali che sono "casi particolari" dell' $\int_\gamma f\, ds$, e più precisamente $\int_\gamma f\, dx$ e $\int_\gamma f\, dy$:

DEFINIZIONE

$$\int_\gamma f\,dx = \int_a^b f(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt$$

$$\int_\gamma f\,dy = \int_a^b f(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt$$

Graficamente se A è l'area del sottografico di f rispetto alla curva γ, questi due integrali non sono altro che le proiezioni rispettivamente sul piano xz e sul piano yz di tale area A.



OSS: come già detto, tutto questo si può fare per una funzione $f(x_1, \dots, x_n)$, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$; si ha

$$\int_\gamma f\,dx_i = \int_a^b f(x_1(t), \dots, x_n(t))\,x_i'(t)\,dt$$

Facciamo una serie di passaggi:

Consideriamo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$

Si ha

$$\int_\gamma (f\,dx + g\,dy) = \int_a^b \left[f(x(t), y(t))\, x'(t) + g(x(t), y(t))\, y'(t) \right] dt =$$

$$= \int_a^b \big(f(x(t), y(t)), g(x(t), y(t)) \big) \bullet (x'(t), y'(t))\, dt =$$

$$= \int_a^b \big(f(x(t), y(t)), g(x(t), y(t)) \big) \bullet \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt =$$

$$= \int_a^b \big(f(x(t), y(t)), g(x(t), y(t)) \big) \bullet T_\gamma(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt =$$

$$= \int_\gamma (f, g) \circ T_\gamma\, ds.$$

Ma questo integrale è la definizione di <u>LAVORO</u> di una forza $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lungo una curva γ

($F \circ T_\gamma$ è la componente della forza lungo la curva)

Analogamente in $\mathbb{R}^n$:

DEFINIZIONE

Si definisce lavoro di una forza $F = (f_1, \dots, f_n)$, $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, lungo una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ l'integrale

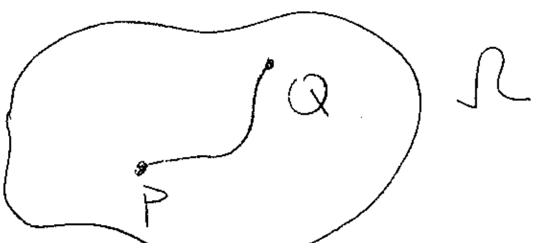
$$\int_\gamma F \circ T_\gamma \, ds = \int_\gamma (f_1 \, dx_1 + f_2 \, dx_2 + \dots + f_n \, dx_n)$$

D'ora in poi ci concentreremo nello studio di oggetti proprio della forma

$$f_1 \, dx_1 + f_2 \, dx_2 + \dots + f_n \, dx_n$$

e del loro integrale.

Per fare questo studio ci metteremo in un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e connesso, cioè supponiamo che $\forall P, Q \in \Omega$ esista una curva continua $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ t.c. $\gamma(t) \in \Omega \ \forall t \in [a, b]$, $\gamma(a) = P$, $\gamma(b) = Q$.



DEFINIZIONE

Sia Ω aperto connesso $\subset \mathbb{R}^n$.

Una uno-forma differenziale lineare in Ω è un'espressione del tipo

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dx_i = p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n$$

dove le $p_i = p_i(x_1, \dots, x_n)$ sono funzioni definite in Ω e sono dette coefficienti della uno-forma ω. La regolarità di una uno-forma è per definizione la regolarità dei suoi coefficienti; ad esempio, se le p_i sono funzioni continue, ω si dirà una uno-forma continua. D'ora innanzi, visto che tratteremo solo uno-forme, parleremo semplicemente di forme.

Si ha

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \sum_{i=1}^{n} p_i \, dx_i = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} p_i(x(t)) \, x_i'(t) \, dt$$

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

Abbiamo già osservato che

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma (p_1, p_2, \dots, p_n) \circ T_\gamma \, ds$$

È immediato notare che, a differenza degli integrali $\int_\gamma f\,ds$, dove valeva $\int_\gamma f\,ds = \int_{-\gamma} f\,ds$, qui si ha

$$\int_{-\gamma} \omega = -\int_\gamma \omega \qquad \text{, infatti}$$

ricordando che $(-\gamma)(t) = \gamma(-t)$, $-b \le t \le -a$, cioè $(-\gamma)(t) = (x_1(-t), \dots, x_n(-t))$, $-b \le t \le -a$, abbiamo $(-\gamma)'(t) = (-x_1'(-t), \dots, -x_n'(-t))$, $-b \le t \le -a$ e quindi

$$\int_{-\gamma} \omega = \int_{-\gamma} \sum_{i=1}^{n} p_i \, dx_i = \int_{-b}^{-a} \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (-x_i'(-t))\,dt \underset{\substack{\tau = -t \\ d\tau = -dt}}{=}$$

$$= \int_b^a \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i'(\tau)\,d\tau = -\int_a^b \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i'(\tau)\,d\tau =$$

$$= -\int_\gamma \sum_{i=1}^{n} p_i \, dx_i = -\int_\gamma \omega$$

<u>OSSERVAZIONE</u>.

$$\left| \int_\gamma \sum_{i=1}^{n} p_i \, dx_i \right| \le \int_\gamma \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2}\, ds$$

Infatti

$$\left| \int_\gamma \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot dx_i \right| = \left| \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i'(t) \right] dt \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b \left| \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i'(t) \right| dt = \int_a^b \left| (p_1, \ldots, p_n) \circ (x_1', \ldots, x_n') \right| dt \leq$$

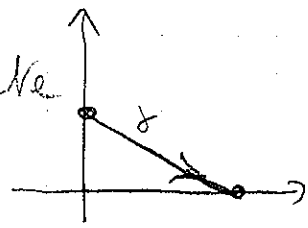
$$\leq \int_a^b |(p_1, \ldots, p_n)| \, |(x_1', \ldots, x_n')| \, dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2} \sqrt{x_i'^2(t)} \, dt = \int_\gamma \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2} \, ds$$

Facciamo alcuni esempi con curve in $\mathbb{R}^2$ e forme in $\mathbb{R}^2$

ESEMPIO 1

Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove $\omega = y^2 dx + x dy$ e γ e' il segmento che congiunge $(0,1)$ a $(2,0)$



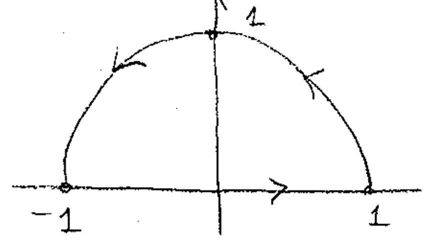
Ris: possiamo descrivere il segmento mediante
$\gamma(t) = (t, 1 - t/2)$, $t \in [0,2]$.

Poiché $dx = x'(t) dt = dt$ e $dy = y'(t) dt = -\frac{1}{2} dt$, avremo

$$\int_\gamma y^2 dx + x dy = \int_0^2 \left[(1 - t/2)^2 + t(-1/2) \right] dt = \int_0^2 \left(\frac{t^2}{4} - \frac{3}{2} t + 1 \right) dt = -\frac{1}{3}$$

ESEMPIO 2

Calcolare $\int_\gamma xy\,dx + \lg(1+y)\,dy$, dove γ e' il bordo del semicerchio $\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ percorso in senso antiorario



Ris:

Parametrizziamo il segmento orientato γ_1 con $(t,0)$, $t \in [-1,1]$ e l'arco di cerchio γ_2 con $(\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0,\pi]$

Si ha $\gamma_1'(t) = (1,0)$, $\gamma_2'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$. Si ha

$$\int_\gamma xy\,dx + \lg(1+y)\,dy = \int_{\gamma_1} xy\,dx + \lg(1+y)\,dy + \int_{\gamma_2} xy\,dx + \lg(1+y)\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} [t \cdot 0 \cdot 1 + \lg(1+0) \cdot 0]\,dt + \int_0^\pi [\cos t \operatorname{sen} t\,(-\operatorname{sen} t) + \lg(1+\operatorname{sen} t)(\cos t)]\,dt$$

$$= 0 - \int_0^\pi \cos t \cdot \operatorname{sen}^2 t\,dt + \int_0^\pi \cos t \cdot \lg(1+\operatorname{sen} t)\,dt = 0$$

ESEMPIO 3

Calcolare $\int_\gamma y\,dx$ dove $\gamma(t) = (a\cos t, b\operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$

Ris:

$$\int_\gamma y\,dx = \int_0^{2\pi} b\operatorname{sen} t\,(-a\operatorname{sen} t)\,dt = -ab\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\,dt = -ab\pi$$

— · —

D'ora in avanti lavoreremo in $\mathbb{R}^2$, al più in $\mathbb{R}^3$, ma come sempre tutto sarà valido anche in $\mathbb{R}^n$

OSSERVAZIONE

C'è un esempio di forma particolarmente importante che già conosciamo: il differenziale di una funzione $f = f(x,y)$ (continua con derivate continue), che denoteremo con df. Si ha

$$\boxed{df = Df \circ (dx, dy) = f_x\, dx + f_y\, dy}$$

Quindi ad una funzione f "abbastanza buona" si può associare la forma df. Viene così naturale chiedersi se vale il viceversa, che è, su questo argomento

IL PROBLEMA FONDAMENTALE

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto e connesso, sia $\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$ una forma in Ω.

Quando esiste una funzione $u = u(x,y)$ su Ω tale che

$$\omega = du \quad ?$$

(cioè $A = u_x$, $B = u_y$)

Una tale funzione, se esiste, si chiama POTENZIALE (o primitiva) di ω e la forma ω si dice ESATTA (o integrabile)

OSSERVAZIONE

se vediamo una forma ω come un campo di vettori (cioè alla forma $\omega = A\,dx + B\,dy$ facciamo corrispondere il campo vettoriale (A, B)), possiamo dire che la forma è esatta se e solo se il campo di vettori è un gradiente, cioè quello che si chiama campo conservativo.

L'esattezza di una forma differenziale $\omega = A\,dx + B\,dy$ equivale quindi alla conservatività del campo vettoriale (A, B).

NOTA BENE: se $u = u(x, y)$ è un potenziale di ω, allora anche $u(x, y) + c$ lo è, $\forall c \in \mathbb{R}$.

Vale però anche il reciproco:

TEOREMA di UNICITÀ

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto connesso, siano $V = V(x, y)$ e $u = u(x, y)$ due potenziali di ω; allora esiste una costante c tale che

$$u(x, y) - V(x, y) = c \qquad \forall (x, y) \in \Omega$$

Dim:

vediamo la dimostrazione in due modi (il secondo sarà utile in futuro per la ricerca di eventuali potenziali di forme) metodo 1:

fissiamo $(x_0, y_0) \in \Omega$, per $(x,y) \in \Omega$ sia $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$, una curva tale che $\gamma(a) = (x_0, y_0)$, $\gamma(b) = (x,y)$.
Dal teorema fondamentale del calcolo segue che

$$u(x,y) - u(x_0,y_0) = \int_a^b \frac{d}{dt} u(x(t), y(t))\, dt =$$

$$= \int_a^b \left[u_x(x(t),y(t))\, x'(t) + u_y(x(t),y(t))\, y'(t) \right] dt =$$

$u_x = v_x$
$u_y = v_y$

$$= \int_a^b \left[v_x(x(t),y(t))\, x'(t) + v_y(x(t),y(t))\, y'(t) \right] dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} v(x(t),y(t))\, dt = v(x,y) - v(x_0,y_0)$$

Quindi

$$u(x,y) - u(x_0,y_0) = v(x,y) - v(x_0,y_0) \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

cioè

$$u(x,y) - v(x,y) = u(x_0,y_0) - v(x_0,y_0) = c \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

vediamo il secondo metodo:

<u>metodo 2</u> :

$$u(x,y) = \int u_x(x,y)\,dx + \varphi_1(y)$$

$$v(x,y) = \int v_x(x,y)\,dx + \varphi_2(y) \underset{v_x = u_x}{=} \int u_x(x,y)\,dx + \varphi_2(y) =$$

$$= u(x,y) - \varphi_1(y) + \varphi_2(y) = u(x,y) + \varphi(y)$$

cioè

$$v(x,y) = u(x,y) + \varphi(y) \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

Derivando quest'ultima uguaglianza rispetto ad y, si ottiene

$v_y = u_y + \varphi'(y)$, ma perché $u_y = v_y$,

deve essere $\varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = \text{costante}$,

da cui

$$v(x,y) = u(x,y) + \text{costante} \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

$\#$

Vediamo adesso un teorema molto importante che ci permetterà di fare grossi passi avanti nello studio dell'esattezza di una forma

TEOREMA

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto connesso, $A = A(x,y)$, $B = B(x,y)$ continue in Ω. Sono equivalenti:

a) $\exists u = u(x,y)$ t.c. $(u_x, u_y) = (A, B)$,

cioè $\omega = A\,dx + B\,y = du$ è esatta

b) $\forall$ curva γ con traiettoria contenuta in Ω,

l'integrale $\int_\gamma \omega = \int_\gamma A\,dx + B\,dy$ dipende

solo dagli estremi di γ

dim:

a) $\Rightarrow$ b) $\int_\gamma \omega = \int_\gamma A\,dx + B\,dy =$

$$= \int_a^b \left[A(x(t), y(t))\, x'(t) + B(x(t), y(t))\, y'(t) \right] dt =$$

per a) ho che ω è esatta

$$= \int_a^b \left[u_x(x(t), y(t))\, x'(t) + u_y(x(t), y(t))\, y'(t) \right] dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\left[u(x(t), y(t)) \right] dt = u(x(b), y(b)) - u(x(a), y(a)) =$$

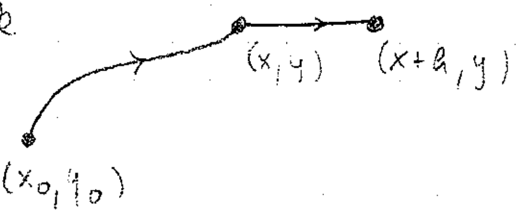
$$= u(\gamma(b)) - u(\gamma(a))$$

b) $\Rightarrow$ a) fissiamo un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ e definiamo

$$u(x,y) = \int_\gamma A\,dx + B\,dy \quad , \text{ dove } \gamma(t),\ t \in [a,b],$$

è una curva tale che $\gamma(a) = (x_0, y_0)$, $\gamma(b) = (x,y)$

Questa funzione $u(x,y)$ è ben definita perché, per b), l'integrale non dipende dalla curva γ.



Consideriamo ora il segmento orizzontale $\gamma_h(t)$ che congiunge (x,y) con $(x+h, y)$.

Si ha

$$u(x+h, y) = \underbrace{\int_{\gamma+\gamma_h}}_{\text{significato evidente}} A\,dx + B\,dy = \int_\gamma A\,dx + B\,dy + \int_{\gamma_h} A\,dx + B\,dy$$

Allora

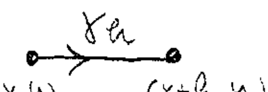
$$\frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} = \frac{\int_\gamma A\,dx + B\,dy + \int_{\gamma_h} A\,dx + B\,dy - \int_\gamma A\,dx + B\,dy}{h} =$$

$$= \frac{\int_{\gamma_h} A\,dx + B\,dy}{h} = \frac{\int_{\gamma_h} A\,dx}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} A(t,y)\,dt =$$

$x < \xi_h < x+h$

$$= \frac{1}{h} \cdot A(\xi_h, y) \cdot h = A(\xi_h, y) \xrightarrow[h \to 0]{} A(x,y)$$

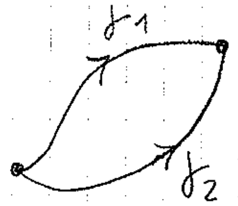
Quindi $\dfrac{\partial u}{\partial x} = A$. Analogamente $\dfrac{\partial u}{\partial y} = B$.



$\gamma_h(t) = (t, y),\ t \in [x, x+h]$

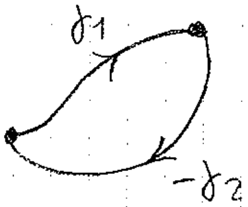
OSSERVAZIONE

La condizione b) del teorema precedente equivale, come è facile vedere, al fatto che che l'integrale della forma su ogni curva chiusa con traiettoria contenuta in Ω sia nullo:



$$\int_{\gamma_1} A\,dx + B\,dy = \int_{\gamma_2} A\,dx + B\,dy$$

$$\Updownarrow$$



$$\int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} = 0 \iff \int_{\gamma_1} + \int_{-\gamma_2} = 0$$

e $\gamma_1 - \gamma_2$ è una curva chiusa

Vale la pena a questo punto fare uno schemino riassuntivo riguardante il calcolo dell'integrale di una forma lungo una curva, nel caso la forma sia esatta.

Supponiamo di dover calcolare

$$\int_\gamma \omega \quad , \quad \omega = A\,dx + B\,dy \quad , \quad \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$$

Le possibilità sono tre.

i) fare il calcolo diretto, cioè calcolare

$$\int_a^b [A(x(t), y(t))\,x'(t) + B(x(t), y(t))\,y'(t)]\,dt$$

ii) calcolare il potenziale $u(x,y)$ di ω (cioè u t.c. $\omega = du$) e ricordare che

$$\int_\gamma \omega = u(\gamma(b)) - u(\gamma(a))$$

iii) sapendo che $\int_\gamma \omega$ non dipende dal percorso γ, ma solo dai suoi estremi $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$, sostituire il percorso con uno più semplice (ad esempio parallelo agli assi) che mantenga gli estremi, e fare il calcolo diretto sul nuovo percorso

Questo terzo metodo si rivela particolarmente utile quando si sa che ω è una forma esatta, ma non se ne conosce il potenziale. Vedremo tra poco una condizione su di una forma ω che, unitamente ad una buona geometria del dominio, ci assicurerà l'esattezza di tale forma. Il vantaggio consisterà nel fatto che tale condizione è molto più semplice da testare dell'esattezza. Ma vediamo prima di calcolare l'intequale d'una forma esatta applicando tutti i tre metodi menzionati precedentemente

ESEMPIO: calcolare $\int_\gamma x\,dx + y\,dy$, dove $\gamma(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t)$ $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

METODO i:

$$\int_\gamma x\,dx + y\,dy = \int_0^{\pi/2} [2\cos t\,(-2\operatorname{sen} t) + \operatorname{sen} t\,(\cos t)]\,dt = \int_0^{\pi/2} (-3\operatorname{sen} t \cos t)\,dt =$$

$\operatorname{sen} t = \tau$

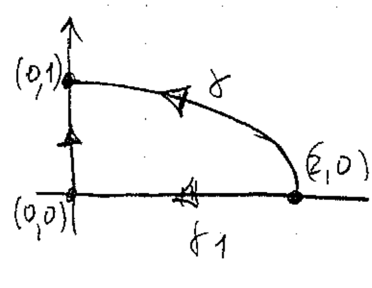
$$= \int_0^1 (-3\tau)\,d\tau = -3\frac{\tau^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{-3}{2}$$

METODO ii: cerchiamo un potenziale $u(x,y)$. Innanzitutto deve essere $u_x = x$ e quindi

$u(x,y) = \int u_x\,dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} + \varphi(y)$, inoltre, poiché deve essere $u_y = y$, dovrà essere $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2} + \varphi(y)\right) = y \iff \varphi'(y) = y \iff \varphi(y) = \frac{y^2}{2} + c$

Quindi in definitiva $u(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + c$ (prendiamo $c=0$)

Si ha $\int_\gamma x\,dy + y\,dx = u(\gamma(\frac{\pi}{2})) - u(\gamma(0)) = u(0,1) - u(2,0) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$



METODO iii: cambiamo la curva $\gamma(t)$ con la curva $\gamma_1 + \gamma_2$, dove γ_1 e' il segmento che unisce $(2,0)$ a $(0,0)$ e γ_2 e' il segmento che unisce $(0,0)$ a $(0,1)$; $\gamma_1(t) = (t,0)$, $t \in [2,0]$ e $\gamma_2(t) = (0,t)$, $t \in [0,1]$. Risulta

$$\int_\gamma x\,dx + y\,dy = \int_{\gamma_1} x\,dx + y\,dy + \int_{\gamma_2} x\,dx + y\,dy = \int_{\gamma_1} x\,dx + \int_{\gamma_2} y\,dy =$$

$$= \int_2^0 t\,dt + \int_0^1 t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_2^0 + \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

Diamo anche un esempio di forma che non sia esatta e di cui quindi sarà impossibile trovare un potenziale. La forma vista qualche pagina fa $\omega = y\,dx$ è chiaramente non esatta, perché abbiamo visto che

$\int_\gamma \omega$ con $\gamma = (a\cos t, b\,\text{sen}\,t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (chiusa!!)

non è zero $\left(\int_\gamma \omega = -ab\pi\right)$ e questo contraddice il teorema di caratterizzazione delle forme esatte. Vediamo che cosa sarebbe successo se avessimo cercato di calcolarne un potenziale

$$\omega = y\,dx + 0 \cdot dy$$

devo vedere se $\exists\, u(x,y)$ t.c. $u_x = y$, $u_y = 0$

da $u_x = y$, si ottiene

$$u(x,y) = \int y\,dx + \varphi(y) = yx + \varphi(y)$$

ora, poiché deve essere $u_y = 0$, si ha

$$u_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(yx + \varphi(y)\right) = x + \varphi'(y) \overset{\text{deve}}{\equiv} 0$$

impossibile

e quindi $\nexists\, u = u(x,y)$ t.c. $du = \omega$.

Diamo ora la seguente

DEFINIZIONE

la forma $\omega = A\,dx + B\,dy$ (A, B continue insieme alle loro derivate)

si dice *chiusa* se

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}}$$

Vediamo come si definisce la condizione in $\mathbb{R}^n$:

DEFINIZIONE

la forma $\omega = \sum_{i=1}^{n} p_i\,dx_i$ si dice chiusa se

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_j} = \frac{\partial p_j}{\partial x_i} \qquad \forall i, j = 1, \dots, n \quad i \neq j$$

In particolare, se $n = 3$ ed $\omega = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$, la condizione diventa

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} \iff \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F_1}{\partial x_3} = \dfrac{\partial F_3}{\partial x_1} \iff \dfrac{\partial F_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial F_3}{x_1} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F_2}{\partial x_3} = \dfrac{\partial F_3}{\partial x_2} \iff \dfrac{\partial F_2}{\partial x_3} - \dfrac{\partial F_3}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

; se $F = (F_1, F_2, F_3)$ è visto come un campo di vettori, la condizione si esprime scrivendo $\mathrm{rot}\, F = 0$, cioè con il fatto che il campo F sia irrotazionale.

$$\mathrm{rot}(F_1, F_2, F_3) = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}$$

Dimostriamo comunque tutto il seguente

TEOREMA.

Sia $\omega = A\,dx + B\,dy$ una forma esatta in Ω, con A, B continue con le loro derivate. Allora ω è chiusa.

dim:

poiché ω è esatta, $\exists\, u = u(x,y)$ potenziale di ω, si ha

$$u_x = A, \quad u_y = B$$

e quindi

$$\frac{\partial A}{\partial y} = u_{xy} \underset{\text{Schwarz}}{=} u_{yx} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

, cioè ω è chiusa.

#

Il teorema precedente dice che se una forma con coeff. $A(x,y)$, $B(x,y)$ di classe $C^1(\Omega)$ è esatta allora è necessariamente chiusa. Il reciproco del teorema precedente richiede una condizione addizionale sulla geometria di Ω, come vedremo tra poco.

OSS: prima di mettersi quindi a cercare un potenziale, conviene testare la chiusura

ESEMPIO IMPORTANTE:

in generale, la sola condizione di chiusura non garantisce l'integrabilità di una forma, cioè una forma chiusa può non essere esatta. Ad esempio consideriamo la forma

$$-\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy \quad , \text{ definita su } \Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

Tale forma è chiusa, infatti:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Tuttavia non è esatta, infatti se consideriamo la curva chiusa $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$ si ha $\int_\gamma \omega \neq 0$ (contrariamente a quanto affermato nel Teorema sull'equivalenza delle forme esatte).

Vediamolo

$$\int_\gamma -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}\cdot(-\operatorname{sen} t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}(\cos t)\right] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t\right] dt = 2\pi \neq 0$$

Diamo ora una condizione sufficiente sulla geometria di Ω che garantisce che ogni forma chiusa in Ω sia automaticamente anche esatta

INSIEMI SEMPLICEMENTE CONNESSI

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ aperto connesso; diremo che Ω è <u>semplicemente connesso</u> sse, comunque prese due curve

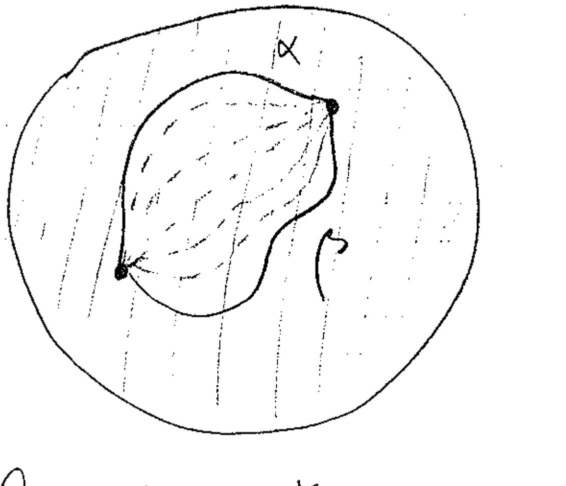
$$\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \ (\mathbb{R}^3)$$

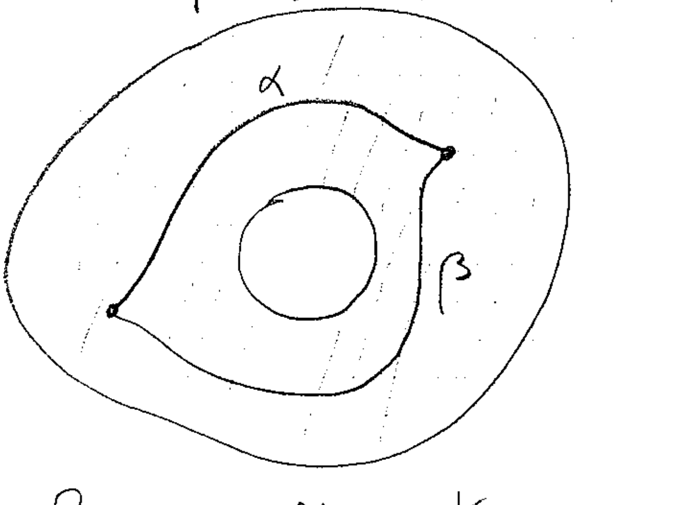
con traiettorie $\alpha([a,b])$, $\beta([a,b])$ contenute in Ω, $\alpha(a)=\beta(a)$, $\alpha(b)=\beta(b)$, è possibile trovare una funzione continua $f : [a,b]\times[0,1] \to \Omega$ tale che

$$(t,s) \longmapsto f(t,s)$$

$$\begin{cases} f(t,0)=\alpha(t) & \forall t \in [a,b] \\ f(t,1)=\beta(t) & \forall t \in [a,b] \\ f(a,s)=\alpha(a)=\beta(a) & \forall s \in [0,1] \\ f(b,s)=\alpha(b)=\beta(b) & \forall s \in [0,1] \end{cases}$$

Geometricamente, questo vuol dire che due curve arbitrarie contenute in Ω e con gli stessi estremi possono essere deformate una nell'altra in modo continuo (si dice che sono "omotope")

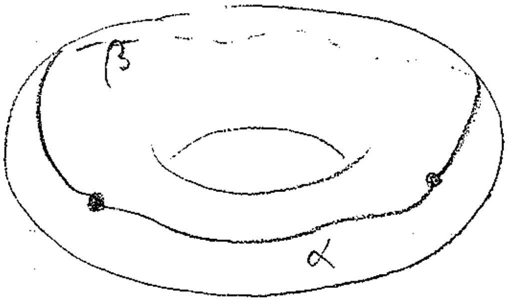


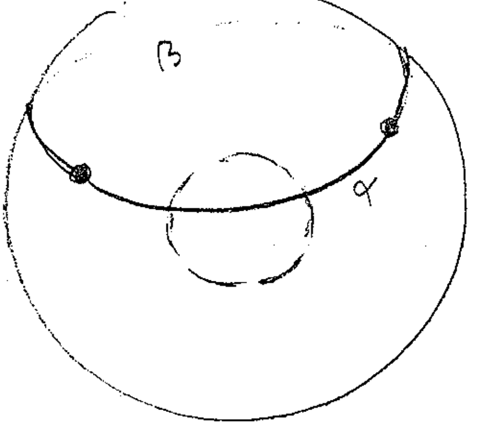


Ω semplicemente connesso $\qquad$ Ω non semplicemente connesso

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, possiamo dire che Ω è semplicemente connesso se non ha "buchi".

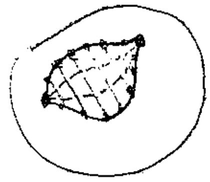
Per $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ la cosa è più complicata; ad esempio una sfera cava $B_R - B_r$, $R > r$, è semplicemente connessa, mentre un toro (una ciambella) non lo è.





OSS: i sottoinsiemi convessi di $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) sono semplicemente connessi. Infatti se $E \subset \mathbb{R}^2$ è convesso e $\alpha, \beta : [a,b] \to E$ sono due curve con $\alpha(a) = \beta(a)$, $\alpha(b) = \beta(b)$, allora

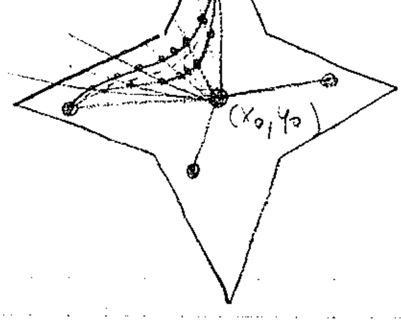
$$f(t,s) = s\,\alpha(t) + (1-s)\,\beta(t) \qquad t \in [a,b],\ s \in [0,1]$$



verifica tutte ipotesi richieste.

Un esempio particolare di insieme semplicemente connesso è l'insieme stellato.

Ω si dice stellato se $\exists (x_0,y_0) \in \Omega$ t.c. $\forall (x,y) \in \Omega$, il segmento di estremi (x_0,y_0) e (x,y) sta tutto dentro Ω.



Questo significa che ogni punto di Ω è raggiungibile a partire da (x_0, y_0) mediante un segmento contenuto in Ω.

Possiamo ora enunciare il teorema fondamentale

TEOREMA

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto semplicemente connesso $\Rightarrow$ ogni forma $A\,dx + B\,dy$ chiusa in Ω, con $A, B \in C^1(\Omega)$, è esatta in Ω

Noi dimostreremo il teorema nell'ipotesi più restrittiva che Ω sia stellato

LEMMA di POINCARÉ

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ stellato

$\omega = A\,dx + B\,dy$ $\qquad \Rightarrow \quad \omega$ è esatta in Ω

$A, B \in C^1(\Omega)$

ω chiusa in Ω

dim:

facendo eventualmente una traslazione del sistema di riferimento, possiamo supporre $(x_0, y_0) = (0,0)$.
Il segmento che va da $(0,0)$ ad (x,y) si parametrizza mediante

$$\gamma(t) = (tx, ty) \quad , \quad 0 \le t \le 1$$

Definiamo

$$u(x,y) = \int_\gamma A\,dx + B\,dy = \int_0^1 [A(tx,ty)x + B(tx,ty)y]\,dt$$

Vediamo che $\omega = du$, cioè che $u_x = A$, $u_y = B$.
Infatti derivando sotto il segno integrale abbiamo

$$u_x = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}[A(tx,ty)x + B(tx,ty)y]\,dt =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{\partial A}{\partial x}(tx,ty)\cdot t\cdot x + A(tx,ty)\cdot 1 + \frac{\partial B}{\partial x}(tx,ty)\cdot t\cdot y \right] dt$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

$$= \int_0^1 \left[A(tx,ty) + \frac{\partial A}{\partial x}(tx,ty)\cdot tx + \frac{\partial A}{\partial y}(tx,ty)\,ty\right] dt$$

$$= \int_0^1 \left[A(tx,ty) + t\,\frac{d}{dt}\big(A(tx,ty)\big)\right] dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[t\cdot A(tx,ty)\right] dt = tA(tx,ty)\Big|_0^1 = A(x,y)$$

Analogamente $u_y = B$ #

OSSERVAZIONE

Osserviamo che nel primo passaggio si è usato il teorema di derivazione sotto il segno di integrale. Pur ritenendolo sia cosa nota, riportiamo di seguito l'enunciato e la dimostrazione

TEOREMA

Sia $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, con derivata rispetto alla seconda variabile continua.

Allora la funzione definita in $[c,d]$ come

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

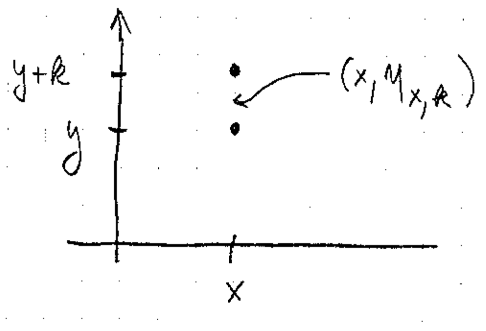
è derivabile e si ha

$$\varphi'(y) = \int_a^b f_y(x,y)\,dx$$

dim:

$$\frac{\varphi(y+k)-\varphi(y)}{k} = \int_a^b \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}\,dx =$$

teorema del valor medio



$$= \int_a^b f_y(x, \eta_{x,k})\,dx \;. \text{ Quindi}$$

$$\left| \int_a^b f_y(x,y)\,dx - \int_a^b f_y(x, \eta_{x,k})\,dx \right| \le \int_a^b \left| f_y(x,y) - f_y(x, \eta_{x,k}) \right| \le \varepsilon (b-a)$$

grazie all'uniforme continuità di f_y

#

OSS:

abbiamo già osservato che nel caso una forma ω sia esatta e non se ne conosca il potenziale, per calcolare $\int_\gamma \omega$ è possibile calcolare

$\int_{\bar{\gamma}} \omega$, con $\bar{\gamma}$ molto più semplice $(\gamma(a)=\bar{\gamma}(a), \bar{\gamma}(b)=\gamma(b))$

perché se una forma è esatta, $\int_\gamma \omega$ dipende solo dagli estremi della curva.

Avendo dimostrato che una forma, in un "buon" dominio, se è chiusa è anche esatta, è evidente che questa osservazione diventa particolarmente utile. Vediamo un esempio

ESEMPIO $\Omega = \mathbb{R}^2$

Calcolare $\int_\gamma (x^2-y^2)dx - 2xy\,dy$ con $\gamma(t)=(t^2-1, t^2+t+2)$
$t \in [0,1]$

Ris:

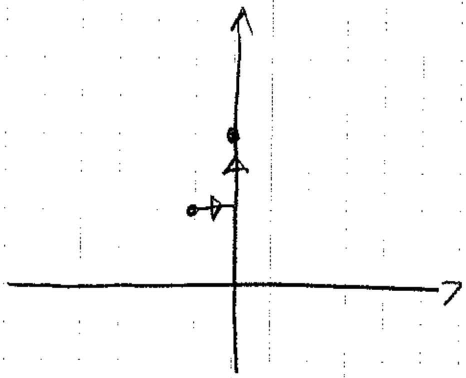
provate a calcolare l'integrale direttamente !!

Noi seguiremo l'idea precedentemente accennata. Vediamo se ω è chiusa

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2) = -2y = \frac{\partial}{\partial x}(-2xy) = -2y \quad \text{sì}.$$

Poiché il dominio $\Omega = \mathbb{R}^2$ siamo in un dominio semplicemente connesso e quindi ω è esatta

Per calcolare $\int_\gamma \omega$ possiamo invece calcolare $\int_{\bar\gamma} \omega$ dove $\bar\gamma$ è data dal segmento prima orizzontale e poi verticale che va da $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$



$\gamma(0) = (-1, 2)$

$\gamma(1) = (0, 4)$

Avremo

$\bar\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t) =$

$\gamma_1(t) = (t, 2) \quad t \in [-1, 0]$

$\gamma_2(t) = (0, t) \quad t \in [2, 4]$

$$\int_{\bar\gamma} (x^2 - y^2)\,dx - 2xy\,dy =$$

$$= \int_{\gamma_1} (x^2-y^2)\,dx + \int_{\gamma_2} (-2xy)\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{0} (t^2-4)\,dt + \int_{2}^{4} 0\,dt = \int_{-1}^{0} (t^2-4)\,dt = \frac{t^3}{3} - 4t \Big|_{-1}^{0} = +\frac{1}{3} - 4 = \frac{-11}{3}$$

Senz'altro questa strada, oltre ad essere nettamente più semplice del calcolo diretto, è anche più breve del calcolo con l'uso del potenziale. Facciamolo.

Cerchiamo $u(x,y)$ t.c. $u_x = (x^2 - y^2)$ e $u_y = -2xy$

Avremo $u(x,y) = \int (x^2 - y^2)\,dx + \varphi(y) =$

$= \frac{x^3}{3} - y^2 x + \varphi(y)$. Dovrà essere poi

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} - y^2 x + \varphi(y)\right) \overset{\text{deve}}{\equiv} -2xy$$

Cioè

$$-2xy + \varphi'(y) = -2xy \iff \varphi'(y) = 0 \iff \varphi(y) = \text{cost}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \frac{x^3}{3} - y^2 x$$

A questo punto

$$\int_\gamma \omega = u(\gamma(1)) - u(\gamma(0)) = u(0,4) - u(-1,2) =$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{3} + 4\right) = -\frac{11}{3}$$

ESERCIZIO

Sia Ω semplicemente connesso. Trovare una funzione $f(x)$ tale che la forma differenziale

$$\omega = f(x)(x+y^2)\,dx + f(x)\,xy\,dy = A\,dx + B\,dy$$

sia esatta. Trovare un potenziale

Ris

per essere esatta deve essere necessariamente chiusa, quindi deve essere

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \iff f(x)\cdot 2y = f'(x)\cdot xy + f(x)\cdot y$$

$$\iff f'(x)\cdot xy = f(x)\cdot y \iff f'(x)\cdot x = f(x)$$

$f(x) = x$ va bene. Quindi

$$\omega = (x^2 + xy^2)\,dx + x^2y\,dy$$

è esatta (perché chiusa e Ω è semplicemente connesso).

Troviamo il potenziale; deve essere

$$u_x = x^2 + xy^2 \quad , \quad u_y = x^2y$$

Sembra più semplice partire dalla seconda equazione, quindi sarà $u(x,y) = \int x^2y\,dy + \varphi(x) = x^2\frac{y^2}{2} + \varphi(x)$.

Ora $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\cdot\frac{y^2}{2} + \varphi(x)\right) = xy^2 + \varphi'(x) \overset{\text{deve}}{=} x^2 + xy^2 \iff \varphi'(x) = x^2$

$\iff \varphi(x) = \frac{x^3}{3} + c$ e quindi $u(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{x^3}{3}$

Riassumiamo i teoremi e le osservazioni fatte finora.
Si ha

i) ω esatta in Ω
Ω aperto connesso $\iff \int_\gamma \omega = 0 \quad \forall \gamma$ chiusa contenuta in Ω

ii) ω esatta in Ω
Ω aperto connesso $\implies \omega$ chiusa
$\not\Leftarrow$ esempio

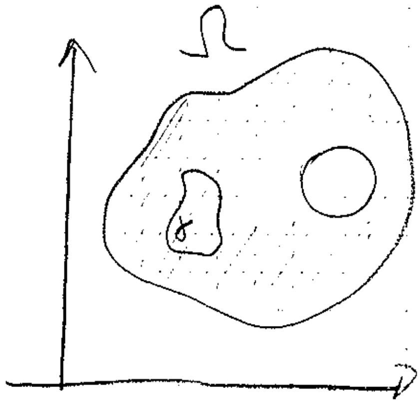
iii) ω chiusa in Ω
Ω aperto semplicemente connesso $\implies \omega$ esatta

Ci chiediamo infine che cosa si può dire se ω è una forma chiusa ed Ω non è semplicemente connesso, cioè Ω ha dei "buchi". Vediamo il caso in cui Ω ha un buco

(con più "buchi" il ragionamento è analogo)

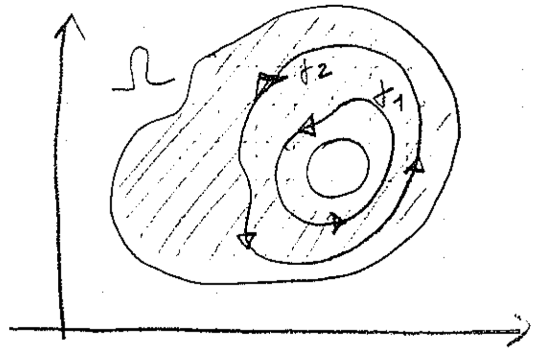
Dimostreremo che

a) ω chiusa, $\gamma \subset \Omega$ curva chiusa che non contiene il buco al suo interno $\Bigg\} \implies \int_\gamma \omega = 0$



b) ω chiusa, γ_1 e γ_2 curve chiuse contenenti il buco e percorse nello stesso senso $\Bigg\} \Rightarrow \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega = K$,

cioè l'integrale di una forma chiusa lungo qualunque curva chiusa contenente il buco ha lo stesso valore



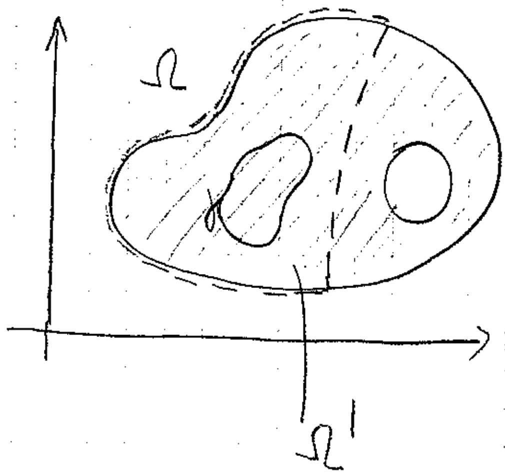
Ma allora, se $\boxed{k=0}$, grazie ad a) e b) si ha che $\int_\gamma \omega = 0$ $\forall \gamma$ chiusa contenuta in Ω e quindi ω è esatta in Ω (caratterizzazione delle forme esatte)

<u>In definitiva</u>

per avere l'esattezza di una forma chiusa in un dominio con un buco, basta che il suo integrale lungo una <u>qualsiasi</u> curva chiusa contenente il buco sia zero.

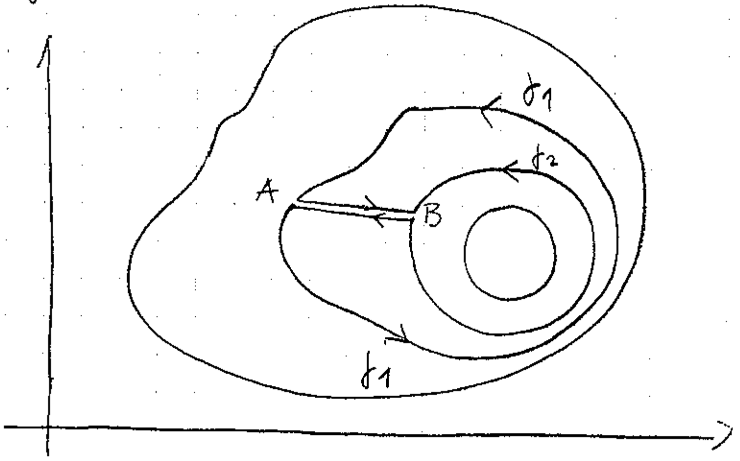
Ora vediamo di dimostrare a) e b)

a) se prendiamo una curva che non contenga il buco possiamo applicare la caratterizzazione delle forme esatte ad ω in Ω'



(ω è chiusa in Ω' semplicemente connesso e quindi è esatta); ne deriva che $\int_\gamma \omega = 0$

b) se congiungiamo le curve γ_1 e $-\gamma_2$ mediante il segmento AB (vedi figura) otteniamo una curva chiusa γ non contenente il buco



Per a) abbiamo quindi

$$0 = \int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{AB} \omega + \int_{-\gamma_2} \omega + \int_{BA} \omega \quad , \text{ cioè}$$

$$\int_{\gamma_1} \omega + \int_{-\gamma_2} \omega = 0 \quad \text{e pertanto} \quad \int_{\gamma_1} \omega = -\int_{-\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_2} \omega \quad \#$$

Vediamo un esempio importante dove si usano proprio queste considerazioni

ESEMPIO

Il vettore campo elettrico è definito in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ da

$$F = (A, B) = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3} \right) \quad , \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

Si verifica subito che la forma

$$\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$$

è chiuso, infatti

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right) = \frac{-x \frac{3}{2} (x^2+y^2)^{1/2} \cdot 2y}{(x^2+y^2)^3} =$$

$$= \frac{-3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}} = - \frac{3xy}{r^5}$$

ed anche

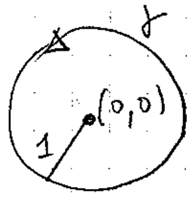
$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right) = \frac{-y \frac{3}{2} (x^2+y^2)^{1/2} \cdot 2x}{(x^2+y^2)^3} =$$

$$= \frac{-3yx}{(x^2+y^2)^{5/2}} = \frac{-3xy}{r^5}$$

In questo caso $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ non è semplicemente connesso e quindi, per vedere se la forma è esatta, devo calcolare $\int_\gamma \omega$, γ chiusa contenente l'origine

e vedere se vale teor.

Prendiamo la curva chiusa $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (che contiene $\{(0,0)\}$)



Si ha

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \frac{x}{r^3} dx + \frac{y}{r^3} dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{1} (-\operatorname{sen} t) dt + \frac{\operatorname{sen} t}{1} (\cos t) dt = 0$$

Quindi ω risulta essere esatta in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, cioè la f.ne $F = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}\right)$ è il gradiente di una funzione $u: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Calcoliamo tale potenziale $u(x,y)$:

deve essere:

$$u_x = \frac{x}{r^3} \implies u(x,y) = \int \frac{x}{r^3} dx + \varphi(y) = \int \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} dx + \varphi(y) =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^{3/2}} + \varphi(y) = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(-\frac{3}{2}+1\right)} t^{-\frac{3}{2}+1} + \varphi(y) = -\frac{1}{\sqrt{t}} + \varphi(y)$$

$\downarrow$

$(x^2+y^2) = t$
$2x\,dx = dt$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \varphi(y)$$

Imponendo ora che u_y deve essere uguale a $\frac{y}{r^3}$, otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\varphi(y)\right)=\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

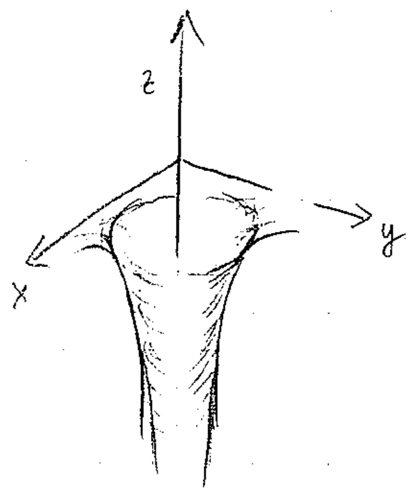
$$\Updownarrow$$

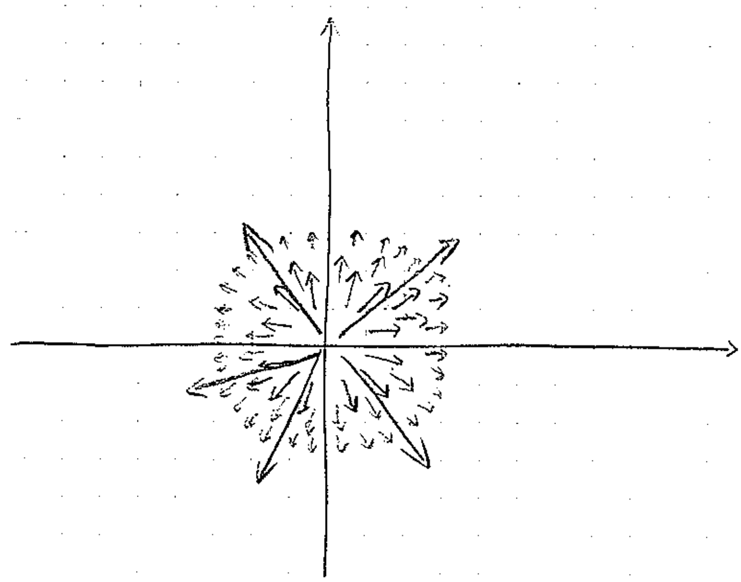
$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(2y)+\varphi'(y)=\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \iff \varphi'(y)=0$$

$$\iff \varphi(y)=\text{cost}$$

Quindi

$$u(x,y)=-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\text{cost}=-\frac{1}{r}+\text{cost}$$





il potenziale elettrico

$u(x,y)=-\frac{1}{r}$

il suo campo di forze

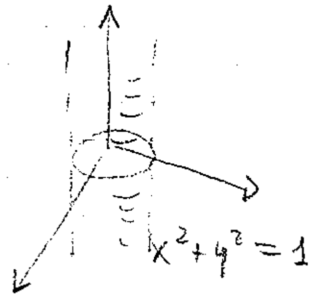
$F=du=\left(\frac{x}{r^3},\frac{y}{r^3}\right)$

ESERCIZIO EXTRA su integrali di forme in $\mathbb{R}^3$:

calcolare $\int_\gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz$, dove γ è la curva

intersezione della superficie $z = xy$ con il cilindro $x^2+y^2=1$, percorsa in senso antiorario.

Ris:



parametrizziamo intanto la curva;

poiché $x^2+y^2=1$ si può descrivere

con $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $t \in [0, 2\pi]$

la componente $z = xy$ sarà $z = \cos t \operatorname{sen} t$ e di conseguenza la curva si può parametrizzare con

$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \cos t \operatorname{sen} t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Osserviamo che $\gamma(0) = (1, 0, 0) = \gamma(2\pi)$ e quindi

la curva è chiusa. Se ω fosse chiusa (essendo $\Omega = \mathbb{R}^3$ aperto semplicemente connesso) sarebbe anche esatta e quindi $\int_\gamma \omega = 0$. Vediamo quindi innanzi tutto se ω è chiusa. Deve essere

$$\frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial x} \qquad \frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial y}$$

$$1 = 0 \qquad 0 = 1 \qquad 1 = 0$$

; ω non è chiusa quindi non è esatta e allora siamo costretti a fare il conto direttamente.

Abbiamo

$$dx = x'(t)dt = (-\operatorname{sen} t)\,dt$$

$$dy = y'(t)dt = \cos t\, dt$$

$$dz = z'(t)dt = [(-\operatorname{sen} t)\operatorname{sen} t + \cos t \cos t]\,dt =$$
$$= [-\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t]\,dt$$

e quindi

$$\int_\gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} [\operatorname{sen} t\,(-\operatorname{sen} t) + \cos t \operatorname{sen} t \cdot \cos t\, dt + \cos t(-\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)]\,dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t + \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \underbrace{\cos^2 t}_{1-\operatorname{sen}^2 t} dt - \int_0^{2\pi} \cos t \underbrace{\operatorname{sen}^2 t}_{1-\cos^2 t} + \int_0^{2\pi} \cos^3 t\, dt =$$

$$= -\pi + \underbrace{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t\, dt - \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 t\, dt - \int_0^{2\pi} \cos t\, dt + \int_0^{2\pi} \cos^3 t\, dt + \int_0^{2\pi} \cos^3 t\, dt}_{} =$$

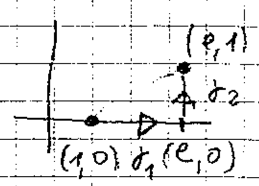
$$= -\pi$$

$\cos t$, $\operatorname{sen} t$, $\cos^3 t$, $\operatorname{sen}^3 t$ hanno integrale nullo tra 0 e 2π

ESERCIZIO Sia $\omega = (3x^2+6xy)\,dx + (3x^2-3y^2)\,dy$

1) verificare che è chiusa, allora è anche esatta; calcolarne il potenziale u tale che $u(0,0)=0$

2) Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma = (e^t, t)$ $t \in [0,1]$



(calcolo diretto e calcolo con l'uso del potenziale)

3) Verificare con un conto diretto che $\int_{\bar\gamma} \omega = \int_\gamma \omega$ dove $\bar\gamma$ sono i due segmenti che uniscono $(1,0)$ a $(e,0)$ a $(e,1)$

Perché?

1) $\frac{\partial}{\partial y}(3x^2+6xy) \overset{?}{=} \frac{\partial}{\partial x}(3x^2-3y^2) \iff 6x \overset{?}{=} 6x$ sì è chiusa

$\omega = du \iff \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2+6xy \Rightarrow u = x^3+3x^2y+\varphi(y) \Rightarrow$

$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2+\varphi'(y) \equiv 3x^2-3y^2 \iff \varphi'(y) = -3y^2 \iff \varphi(y) = -y^3+k$

$u(x,y) = x^3+3x^2y-y^3+k \quad u(0,0) = k \equiv 0 \Rightarrow \boxed{u(x,y) = x^3+3x^2y-y^3}$

2) $\int_\gamma \omega = \int_0^1 (3e^{2t}+6te^t)e^t\,dt + (3e^{2t}-3t^2)\,dt = \int_0^1 (\underset{1°}{3e^{3t}} + \underset{3°}{6te^{2t}} + \underset{4°}{3e^{2t}} - \underset{2°}{3t^2})\,dt$

$+\frac{3}{2}e^{2t}\Big|_0^1$

$= e^{3t}\Big|_0^1 - t^3\Big|_0^1 + 6t\frac{e^{2t}}{2}\Big|_0^1 - 6\int_0^1 \frac{e^{2t}}{2}\,dt = e^3 - 2 + \frac{6}{2}e^2 - \frac{6}{4}e^2 + \frac{6}{4} + \frac{3}{2}e^2 - \frac{3}{2} = e^3+3e^2-2$

$\int_\gamma \omega = u(\gamma(1)) - u(\gamma(0)) = u(e,1) - u(1,0) = e^3+3e^2-1-1 = e^3+3e^2-2$

$\int_{\bar\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} = \int_1^e 3x^2\,dx + \int_0^1 (3e^2-3y^2)\,dy =$

$= x^3\Big]_1^e + 3e^2 - y^3\Big]_0^1 = e^3 - 1 + 3e^2 - 1 = e^3+3e^2-2$