Corso di Analisi Matematica **Anno accademico 2007/08**

Analisi Matematica per Informatica

PRIMO COMPITINO - 29 ottobre 2007

Esercizio 1

Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1 - \sin(2x)}{1 - \cos x - x^2}$$

Esercizio 2

Trovare una primitiva della funzione

$$f(x) = \tfrac{2x^3+3x^2-31x+28}{x^2+2x-15}$$

Esercizio 3

Studiare in dettaglio la funzione

$$f(x) = e^x(x^2 + 3x + 1)$$

Esercizio 4

Scrivere la definizione di

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$$

Esercizio 5

Sia $G(x)$ una primitiva di $g(x)$. Dimostrare che la funzione $F(x) = G(x)\cos^2 x$ è una primitiva di

$f(x) = g(x)\cos^2 x - 2F(x)\tan x$

Correzione Compito A, 29/10/2007

Esercizio 1
Il limite è della forma $\frac{0}{0}$, quindi si può risolvere con la regola di De l'Hopital applicata 2 volte:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-\sin(2x)}{1-\cos x-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-2\cos(2x)}{\sin x-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}+4\sin(2x)}{\cos x-2}=-4$$

Esercizio 2
Prima di integrare, essendo il numeratore un polinomio di grado maggiore del denominatore, si esegue la divisione del polinomio al numeratore (di grado 3) per il polinomio al denominatore (di grado 2). Si ottiene quindi:

$$f(x)=\frac{2x^3+3x^2-31x+28}{x^2+2x-15}=2x-1+\frac{x+13}{x^2+2x-15}$$

e

$$\int f(x)\ dx=\int(2x+1)dx+\int\frac{x+13}{x^2+2x-15}$$

Poichè

$$x^2+2x-15=(x-3)(x+5)$$

per $\dfrac{x+13}{x^2+2x-15}$ si cerca una decomposizione della forma

$$\frac{x+13}{x^2+2x-15}=\frac{A}{x+5}+\frac{B}{x-3}$$

Dando lo stesso denominatore ed eseguendo i calcoli si ottiene:

$$A=-1,\quad B=2$$

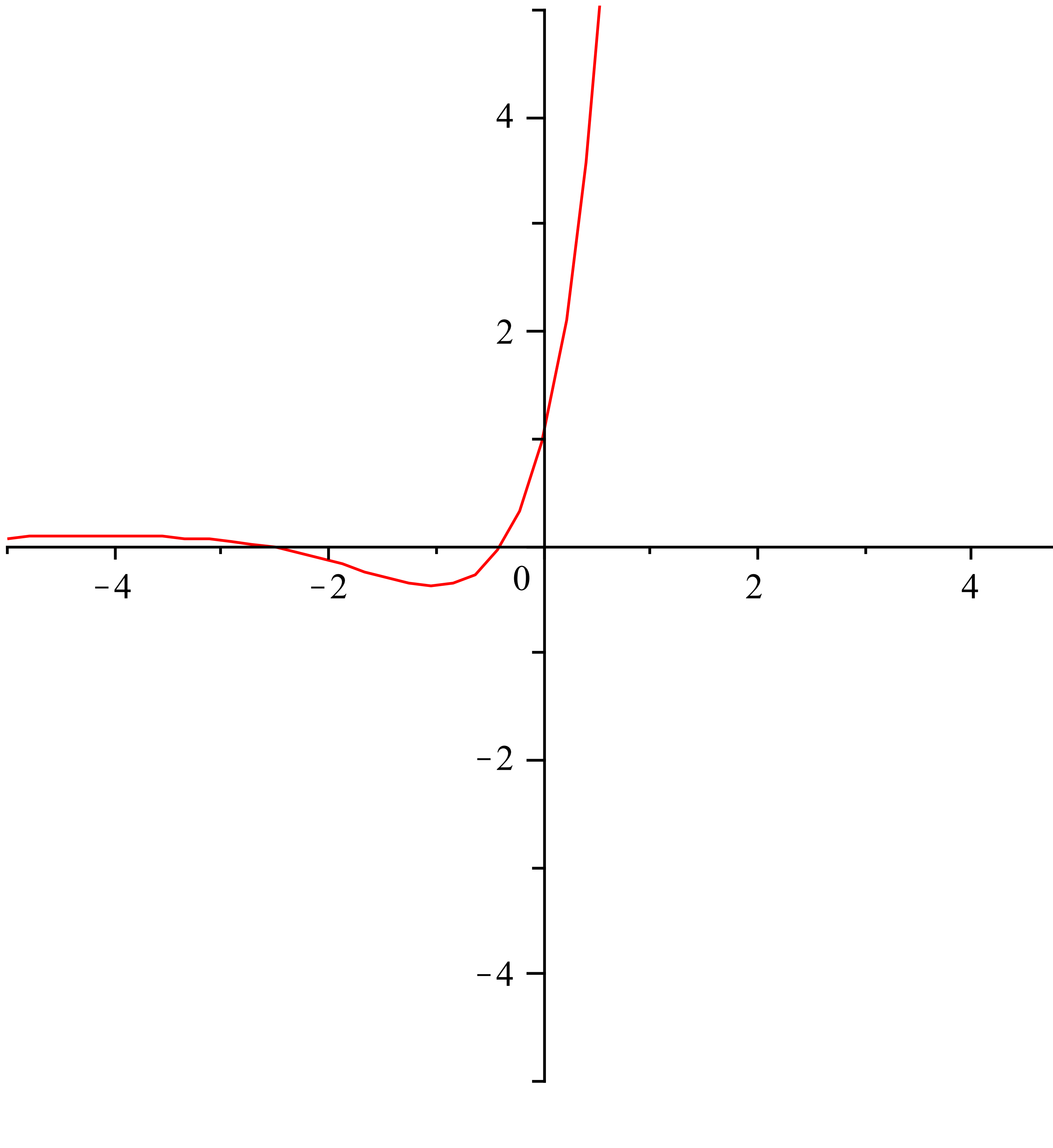
In definitiva

$$\int f(x)\ dx=x^2-x-\int\frac{1}{x+5}+\int\frac{2}{x-3}=x^2-x-\log|x+5|+2\log|x-3|+c.$$

Esercizio 3

1. Dominio della funzione $D=\mathbb{R}$.
2. Intersezioni con gli assi. $(0,1)$, $(\frac{-3-\sqrt{5}}{2},0)$, $(\frac{-3+\sqrt{5}}{2},0)$; gli ultimi due punti sono stati ottenuti risolvendo $x^2+3x+1=0$, dato che $e^x>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$. Da quest'ultimo fatto e dallo studio del segno del polinomio x^2+3x+1 si ottiene che la funzione è negativa soltanto nell'intervallo $(\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\frac{-3+\sqrt{5}}{2})$, mentre in $\mathbb{R}-[\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\frac{-3+\sqrt{5}}{2}]$ è >0.
3. Limiti agli estremi del dominio: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\infty$, dato che ciascuno dei 2 fattori tende a $+\infty$ per $x\to+\infty$. Il limite $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ è della forma $0\cdot\infty$, quindi prima di essere risolto con regola di De l'Hopital deve essere portato, per esempio, alla forma $\frac{\infty}{\infty}$. Con due successive applicazioni della regola di De l'Hopital si ottiene poi:
$$\lim_{x\to-\infty}e^x(x^2+3x+1)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x+1}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{-e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=0$$
4. Massimi e minimi relativi: Si ha: $f'(x)=e^x(x^2+5x+4)$, quindi poichè $x^2+5x+4=0$, per $x=-4$ e $x=-1$, dallo studio del segno della derivata si ha che la funzione è crescente per $x<-4$ e $x<-1$, mentre $x=-4$ e $x=-1$ risultano rispettivamente punto di massimo relativo e punto di minimo assoluto per la funzione. Inoltre $f(-1)=-e^{-1}$ e $f(-4)=3e^{-4}$

5. Concavità e convessità della funzione: $f''(x) = e^x(x^2 + 7x + 9)$, e $f''(x) = 0$ per $x = \frac{-7-\sqrt{13}}{2}$ e $x = \frac{-7+\sqrt{13}}{2}$; dallo studio del segno di $f''(x)$ si ricava che $f(x)$ volge la concavità verso il basso nell'intervallo $(\frac{-7-\sqrt{13}}{2}, \frac{-7+\sqrt{13}}{2})$ e verso l'alto in $\mathbb{R} - [\frac{-7-\sqrt{13}}{2}, \frac{-7+\sqrt{13}}{2}]$.



Esercizio 4
$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, M > 0$ tale che $x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Esercizio 5
$F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$. Quindi

$$F'(x) = G'(x)\cos^2 x - 2G(x)\cos x \sin x = g(x)\cos^2 x - 2F(x)\frac{\sin x}{\cos x} = g(x)\cos^2 x - 2F(x)\mathrm{tg}\ x = f(x).$$