B

Analisi Matematica per Informatica

COMPITO COMPLETO - 6 febbraio 2008

Esercizio 1

Si studi in dettaglio in $(0, +\infty)$ la funzione $f(x) = \sqrt{x + \frac{8}{x} + \left|1 - \frac{8}{x}\right|}$

(non è necessario lo studio della derivata seconda nell'intervallo $(0, 8)$)

Esercizio 2

Trovare l'intervallo di convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n(n+3)}$$

Esercizio 3

Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = e^x(x+1) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4

Calcolare

$$\int_D x e^{y-1} \, dxdy$$

dove $D = \{(x, y) \in R^2 \ , \ x \geq 0 \ , \ y \leq 1 - x^2 \ , \ y \geq -1\}$

Esercizio 5

Scrivere una condizione necessaria affinché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga

Esercizio 6

Dare la definizione di lunghezza del grafico di una funzione f definita in $[a, b]$, due volte derivabile.

Correzione Compito B

Esercizio 1

Tenendo conto che $x \in (0, +\infty)$ e del segno di $x-8$, per cui $|x-8| = -x+8$ se $x \leq 8$ e $|x-8| = x-8$ se $x > 8$ la funzione f si può esplicitare in questo modo;

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - x + 16}{x}}, \text{ se } 0 < x \leq 8$$

$$f(x) = \sqrt{x+1} \text{ se } x > 8$$

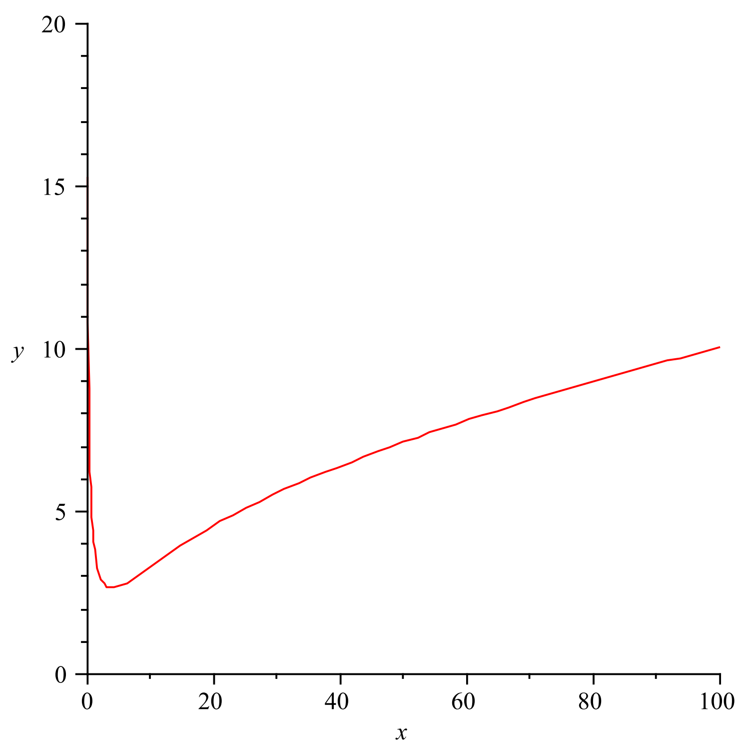
Osserviamo che $x^2 - x + 16 > 0$ e $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in (0, +\infty)$, inoltre

- $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

- $$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x^2 - x + 16}}\frac{x^2 - 16}{x^2} \text{ se } 0 < x < 8$$
  $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \text{ se } x > 8$$

  per cui dallo studio della derivata prima si ottiene che esiste un unico punto di minimo che è $x = 4$ in cui $f(4) = \sqrt{7}$. Poichè
  $$\lim_{x \to 8^+} f'(x) = \frac{1}{6}$$
  e
  $$\lim_{x \to 8^-} f'(x) = \frac{1}{8}$$
  la funzione non è derivabile in $x = 8$.

Il grafico della funzione è:



(Si noti che ingrandendo opportunamente il grafico vicino a $x = 8$ si può vedere graficamente la non derivabilità della funzione in questo punto)

Esercizio 2

Usando il criterio del rapporto, se $a_n = \dfrac{x^n}{3^n(n+3)}$ si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)3^n|x|^{n+1}}{(n+4)3^{n+1}|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{3(n+4)}|x| = \frac{|x|}{3}$$

Quindi, sicuramente si ha convergenza nell'intervallo $(-3, 3)$, in $x = 3$ la serie diventa: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+3}$, che risulta quindi divergente, $x = -3$ la serie è a termini di segno alterno e converge per il criterio di Leibniz.

Esercizio 3

L'equazione caratteristica dell'equazione differenziale è $a^2 + 1 = 0$, la cui soluzione sono $a = -i$ e $a = i$. La soluzione generale dell'omogenea è quindi $y_o = c_1 \cos x + c_2 \sin x$; la soluzione particolare, essendo il secondo membro prodotto di un polinomio di grado 1 e un esponenziale, va cercata nella forma $y_p = (ax + b)e^x$ e i coefficienti a, b, c vanno determinati eseguendo le derivate di y_p e sostituendo nell'equazione di partenza. La soluzione del problema di Cauchy proposto è $y = \cos x - \frac{1}{2} \sin x + \frac{e^x x}{2}$

Esercizio 4

La regione si può vedere come l'insieme $D = \{(x, y) : 0 \le x \le \sqrt{2}, -1 \le y \le 1 - x^2\}$, quindi usando la formula di riduzione per gli integrali doppi, l'integrale diventa

$$\int_D xe^{y-1}\ dxdy = e^{-1} \int_0^{\sqrt{2}} x\ dx \Big(\int_{-1}^{1-x^2} e^y\ dy \Big)$$

L'integrale più interno fornisce

$$\int_{-1}^{1-x^2} e^y\ dy = e^{1-x^2} - e^{-1}$$

Perciò l'integrale diventa

$$\int_D xe^{y-1}\ dxdy = \int_0^{\sqrt{2}} xe^{-x^2}\ dx - \frac{1}{e^2} \int_0^{\sqrt{2}} x\ dx = -\frac{3}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}$$

.

(l' integrale $\int_0^{\sqrt{2}} xe^{-x^2}\ dx$ si può calcolare con la sostituzione $x^2 = t$).