A

Analisi Matematica per Informatica

COMPITO COMPLETO - 9 gennaio 2008

Esercizio 1

Si studi in dettaglio la seguente funzione:

$$f(x) = |x|e^{\frac{1}{7}(7x|x|-x^2)}$$

Esercizio 2

Trovare l'intervallo di convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n} x^n$$

Esercizio 3

Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 4x^2 + 4x + 2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4

Calcolare

$$\int_D \sin x \cos y \; dxdy$$

dove D é il triangolo di vertici $(0, \frac{\pi}{2})$, $(0, -\frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$

Esercizio 5

Scrivere il polinomio di Taylor $P_2(x)$, di ordine due e centrato in $x_0 \in (a, b)$, di una funzione f definita in $[a, b]$, due volte derivabile

Esercizio 6

Scrivere la formula di integrazione per parti

Correzione Compito A

Esercizio 1

La funzione f si può esplicitare in questo modo;

$$f(x) = xe^{\frac{1}{7}(7x^2-x^2)} = xe^{\frac{6}{7}x^2}, \text{ se } x \geq 0$$

$$f(x) = -xe^{\frac{1}{7}(-7x^2-x^2)} = -xe^{-\frac{8}{7}x^2}, \text{ se } x < 0$$

Quindi osserviamo che

- Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$, l'unica intersezione con gli assi è l'origine e la funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$.
- I limiti della funzione agli estremi del dominio sono:

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{\frac{6}{7}x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} -xe^{-\frac{8}{7}x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{e^{\frac{8}{7}x^2}} = 0$$

  Nel penultimo passaggio il limite è della forma $\frac{\infty}{\infty}$ e si può quindi calcolare con la regola di De L'Hopital.

-

$$f'(x) = e^{\frac{6}{7}x^2}(1 + \frac{12}{7}x^2), \text{ se } x > 0$$

$$f'(x) = e^{-\frac{8}{7}x^2}(-1 + \frac{16}{7}x^2), \text{ se } x < 0$$

  Inoltre

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0_+} \frac{xe^{\frac{6}{7}x^2}}{x} = 1$$

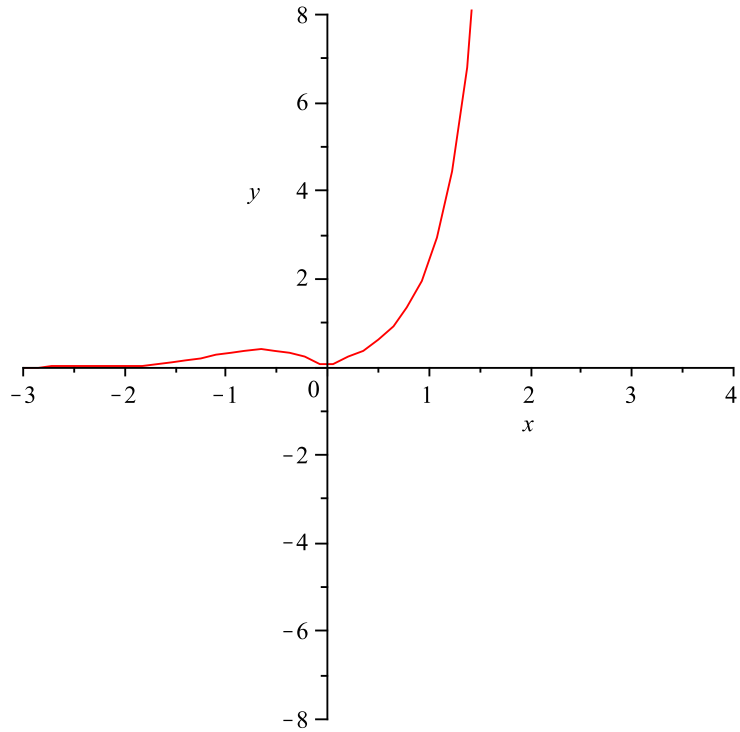
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0_-} \frac{-xe^{-\frac{8}{7}x^2}}{x} = -1$$

  Dallo studio della derivata prima si deduce che la funzione è crescente per $x > 0$ e ha un massimo nel punto $x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$

$$f''(x) = e^{\frac{6}{7}x^2}\frac{12}{7}x(3 + \frac{12}{7}x^2), \text{ se } x > 0$$

$$f''(x) = e^{-\frac{8}{7}x^2}\frac{16}{7}x(3 - \frac{16}{7}x^2), \text{ se } x < 0$$

  Dallo studio della derivata seconda si deduce che la funzione è convessa per $x > 0$ e $x < -\frac{\sqrt{21}}{4}$, mentre è concava per $-\frac{\sqrt{21}}{4} < x < 0$.
  Il grafico della funzione è:



Esercizio 2

Usando il criterio del rapporto, se $a_n = \frac{n}{e^n}|x|^n$ si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)e^n|x|^{n+1}}{ne^{n+1}|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{ne}|x| = \frac{|x|}{e}$$

Quindi, sicuramente si ha convergenza nell'intervallo $(-e, e)$, in $x = e$ la serie diventa: $\sum_{n=1}^{+\infty} n$, che risulta quindi divergente, dato che $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ (si ricordi la condizione necessaria per la convergenza di una serie), in modo del tutto analogo si dimostra che la serie non converge per $x = -e$ (in questo punto non si può dire altro dato che la serie non è positiva).

Esercizio 3

L'equazione caratteristica dell'equazione differenziale è $a^2 + 4a + 4 = 0$, la cui soluzione è la radice doppia $a = -2$. La soluzione generale dell'omogenea è quindi $y_o = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$; la soluzione particolare, essendo il secondo membro un polinomio di grado 2, va cercata nella forma $y_p = ax^2 + bx+c$ e i coefficienti $a,\ b,\ c$ vanno determinati eseguendo le derivate di y_p e sostituendo nell'equazione di partenza. La soluzione del problema di Cauchy proposto è $y = xe^{-2x} + x^2 - x + 1$

Esercizio 4

Il triangolo si può vedere come l'insieme $D = \{(x, y) : 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, x - \frac{\pi}{2} \le y \le -x + \frac{\pi}{2}\}$, quindi usando la formula di riduzione per gli integrali doppi l'integrale diventa

$$\int_D \sin x \cos y \; dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \; dx \Big(\int_{x-\frac{\pi}{2}}^{-x+\frac{\pi}{2}} \cos y \; dy \Big)$$

L'integrale più interno fornisce

$$\int_{x-\frac{\pi}{2}}^{-x+\frac{\pi}{2}} \cos y \; dy = [\sin y]_{x-\frac{\pi}{2}}^{-x+\frac{\pi}{2}} = \sin(-x + \frac{\pi}{2}) - \sin(x - \frac{\pi}{2}) = 2 \cos x$$

Perciò l'integrale diventa

$$\int_D \sin x \cos y \; dxdy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \; dx = [\sin^2 x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

.

D

Analisi Matematica per Informatica

COMPITO COMPLETO - 9 gennaio 2008

Esercizio 1

Si studi in dettaglio la seguente funzione:

$$f(x) = |5 - \tfrac{1}{5}\ln(1+x^2)|$$

Esercizio 2

Trovare l'intervallo di convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n x^n$$

Esercizio 3

Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = \sin x \\ y(0) = \frac{1}{10} \\ y'(0) = \frac{9}{5} \end{cases}$$

Esercizio 4

Calcolare

$$\int_D x\frac{\sin y}{2}\ dxdy$$

dove $D = \{(x,y) \in R^2\ ,\ x \geq 0\ ,\ y \geq x^2\ ,\ y \leq 4\}$

Esercizio 5

Dare la definizione di convergenza assoluta della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Esercizio 6

Scrivere la formula della derivata di una funzione composta

Correzione Compito D

Esercizio 1

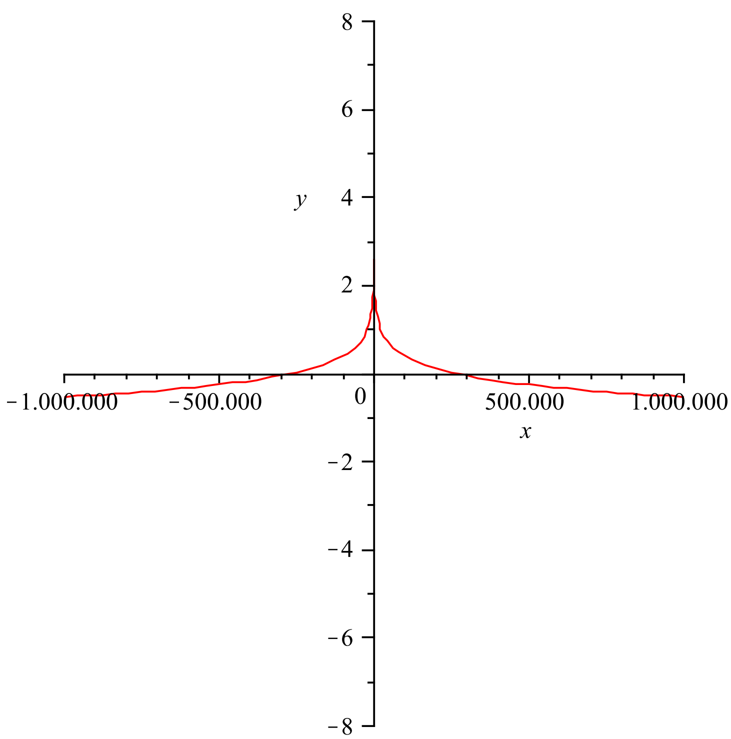
Per semplicità si può studiare la funzione $g(x) = 5 - \frac{1}{5}\ln(1+x^2)$, senza valore assoluto, tracciarne il grafico e poi ottenere il grafico della funzione assegnata, tenendo il grafico di g nei punti in cui la funzione è positiva e facendo la simmetria di esso, rispetto all'asse delle x, nei punti in cui la funzione g è negativa.

Quindi osserviamo che

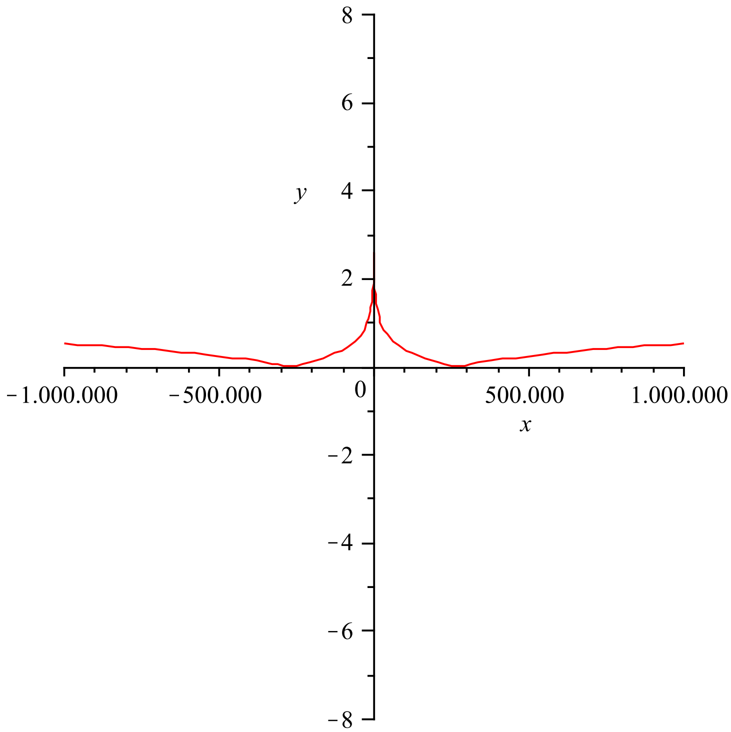
- Il dominio della funzione g è $\mathbb{R}$, l' intersezione con l'asse y è $y = 5$, le intersezioni con l'asse x si ottengono risolvendo: $5 - \frac{1}{5}\ln(1+x^2) = 0$, le cui soluzioni sono $x = -\sqrt{e^{25}-1},\ x = \sqrt{e^{25}-1}$.
- $$g'(x) = -\frac{2}{5}\frac{x}{x^2+1}$$ $$g''(x) = \frac{2}{5}\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$$

  Dallo studio delle derivate prima e seconda si ottiene che $x = 0$ è un punto di massimo per la funzione e i punti 1 e -1 sono punti in cui la funzione cambia concavità.

Il grafico della funzione g è:



Il grafico della funzione f (ottenuto come spiegato all'inizio)è:



Si può dimostrare che i punti $x = -\sqrt{e^{25} - 1}$, $x = \sqrt{e^{25} - 1}$ sono punti in cui la funzione f non è derivabile.

Esercizio 2

Usando il criterio della radice, se $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |x|^n$ si ha:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1}|x| = |x|$$

Quindi, sicuramente si ha convergenza nell'intervallo $(-1, 1)$, in $x = 1$ la serie diventa: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$, che risulta positiva e divergente dato che $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$ (si ricordi la condizione necessaria per la convergenza di una serie), in modo del tutto analogo si dimostra che la serie non converge per $x = -1$ (si noti che in questo punto non si può dire che la serie è divergente).

Esercizio 3

La soluzione generale dell'omogenea è $y_o = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$; la soluzione particolare, va cercata nella forma $y_p = a \sin x + b \sin x$ e i coefficienti a, b, vanno determinati eseguendo le derivate di y_p e sostituendo nell'equazione di partenza. La soluzione del problema di Cauchy proposto è $y = \frac{1}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{5}\sin x + \frac{1}{10}\cos x$

Esercizio 4

La regione si può vedere come l'insieme $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 2, x^2 \le y \le 4\}$, quindi usando la formula di riduzione per gli integrali doppi, l'integrale diventa

$$\frac{1}{2}\int_D x \sin y \; dxdy = \frac{1}{2}\int_0^2 x \; dx\Big(\int_{x^2}^4 \sin y \; dy\Big)$$

L'integrale più interno fornisce

$$\int_{x^2}^4 \sin y \; dy = -\cos 4 + \cos(x^2)$$

Perciò l'integrale diventa

$$\frac{1}{2}\int_D x \sin y \; dxdy = \frac{1}{4}\int_0^2 2x(-\cos 4 + \cos(x^2) \; dx = -\cos 4 + \frac{1}{4}\sin 4$$

.

(l' integrale $\int_0^2 2x\cos(x^2) \; dx$ si può calcolare con la sostituzione $x^2 = t$).