B

Analisi Matematica per Informatica

24 giugno 2008

Esercizio 1

Si studi in dettaglio la funzione

$$f(x) = \tfrac{x^2}{18} + 10 + |\ln x|$$

Esercizio 2

Trovare l'intervallo di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{e^{n^2}}\, x^n$$

Esercizio 3

Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{x}{y} \ln x \\ \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 4

Calcolare

$$\int_D (4 - x^2 - y^2)\; dxdy$$

dove $D = [B_2(0,0) - B_1(0,0)] \cap \{(x,y) \in R^2 \;,\; x \geq 0\}$

Esercizio 5

Dimostrare che $f(x)$ derivabile in $x_0 \in R$ implica $f(x)$ continua in x_0

Esercizio 6

Descrivere il piano tangente in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ di una funzione $f(x,y)$ differenziabile in (x_0, y_0)

Correzione Compito B

Esercizio 1

Il dominio della funzione è $D = \{x : x > 0\}$.

La funzione f si può esplicitare in questo modo:

$$f(x) = \frac{x^2}{18} + 10 + \ln x, \text{ se } x > 1$$

$$f(x) = \frac{x^2}{18} + 10 - \ln x, \text{ se } x \geq 1$$

Inoltre

- $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$
- $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
- $$f'(x) = \frac{2x}{18} + \frac{1}{x} \text{ se } x > 1$$
  $$f'(x) = \frac{2x}{18} - \frac{1}{x} \text{ se } x < 1$$
- $$f''(x) = \frac{x^2 - 9}{9x^2} \text{ se } x > 1$$
  $$f''(x) = \frac{x^2 + 9}{9x^2} \text{ se } x < 1$$

Dallo studio della derivata prima si ottiene che esiste un unico punto di minimo che è $x = 1$ in cui $f(1) = \frac{1}{18} + 10$ e in cui poichè

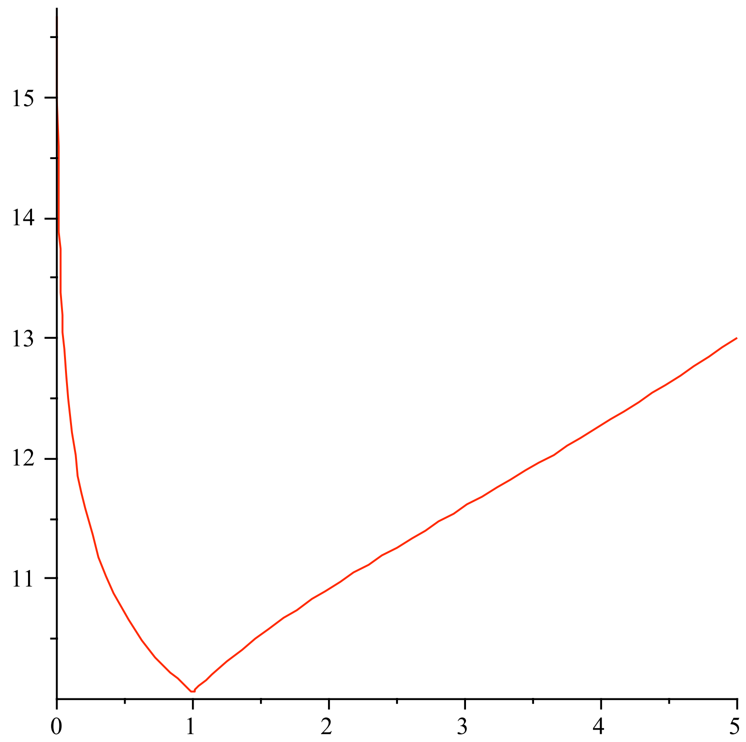
$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = -\frac{8}{9}$$

e

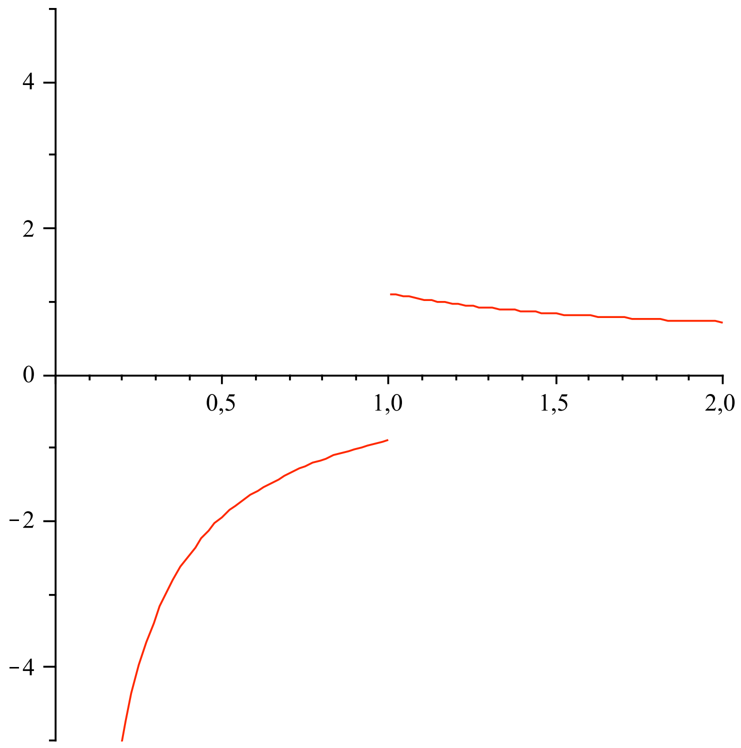
$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \frac{10}{9}$$

la funzione non è derivabile. Dallo studio della derivata seconda si ottiene poi che esiste un punto di flesso $x = 3$.

Il grafico della funzione è:



Il grafico della derivata è:



Esercizio 2

Usando il criterio del rapporto, se $a_n = \dfrac{(n+1)!}{e^{n^2}} x^n$ si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!}{e^{(n+1)^2}} \frac{e^{n^2}}{(n+1)!} |x| = \lim_{n\to\infty} (n+2)e^{-2n-1}|x| = 0$$

Quindi, per il criterio del rapporto la serie risulta sempre convergente.

Esercizio 3

Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili, separando le variabili e integrando si ottiene:

$$\int y \; dy = \int x \ln x \; dx + c$$

L'integrale di destra si svolge con la sostituzione $\ln x = t$, che fornisce, $x = e^t$ e $dx = xdt = e^t dt$, per cui si ottiene

$$\frac{y^2}{2} = \int te^{2t} \; dt + c$$

svolgendo l'integrale di destra per parti si ottiene

$$\int te^{2t} \; dt \frac{te^{2t}}{2} - \frac{1}{4}e^{2t} = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{4}x^2$$

La soluzione implicita dell'equazione differenziale è quindi

$$y^2 = 2\Big(\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{4}x^2 + c\Big)$$

La soluzione del problema di Cauchy proposto è $y = \sqrt{x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}}$

Esercizio 4

La regione si può esprimere facilmente in coordinate polari come l'insieme $D = \{(\rho, \theta) : 1 \leq \rho \leq 2, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$, quindi esprimendo la funzione in coordinate polari l'integrale diventa

$$\int (4 - \rho^2)\rho \; d\rho \; d\theta =$$

(usando la formula di riduzione per gli integrali doppi)

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \Big(\int_1^2 (4 - \rho^2)\rho \; d\rho \Big) = \frac{9}{4}\pi.$$

(l' integrale $\int_1^2 (4 - \rho^2)\rho \; d\rho$ si può calcolare con la sostituzione $4 - \rho^2 = t$).