B

Analisi Matematica per Informatica

14 luglio 2008

Esercizio 1

Si studi continuità, derivabilità e curvatura della funzione

$$f(x) = 2x + |\cos x| \ , \ x \in [-\pi, \pi]$$

Esercizio 2

Trovare l'intervallo di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}\ 5^n}$$

Esercizio 3

Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 25 \sin x \\ y(0) = -25 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4

Calcolare

$$\int_D x^2 \left(x^2 + y^2\right)^2 \ dxdy$$

dove $D = B_1(0,0) \cap \left\{(x,y) \in R^2 \ , \ y \geq 0\right\}$

Esercizio 5

Dimostrare che $f(x,y)$ differenziabile in $(x_0, y_0) \in R^2$ implica $f(x,y)$ continua in (x_0, y_0)

Esercizio 6

Enunciare il criterio del rapporto per una serie numerica di termine generale $a_n > 0$

Correzione Compito B

Esercizio 1

La funzione f si può esplicitare in questo modo:

$$f(x) = 2x + \cos x, \text{ se } -\tfrac{\pi}{2} \leq x \leq \tfrac{\pi}{2}$$
$$f(x) = 2x - \cos x, \text{ se } -\pi \leq x < -\tfrac{\pi}{2} \text{ e se } \tfrac{\pi}{2} < x \leq \pi$$

Inoltre

- $$f(-\pi) = -2\pi + 1;\ f(\pi) = 2\pi + 1; f(-\frac{\pi}{2}) = -\pi;\ f(\frac{\pi}{2}) = \pi$$
- $$f'(x) = 2 - \sin x \text{ se } -\tfrac{\pi}{2} < x < \tfrac{\pi}{2}$$
  $$f'(x) = 2 + \sin x \text{ se } <\leq x < -\tfrac{\pi}{2} \text{ e se } \tfrac{\pi}{2} < x < \pi$$
- $$f''(x) = \ -\cos x \text{ se } -\tfrac{\pi}{2} < x < \tfrac{\pi}{2}$$
  $$f''(x) = \ \cos x \text{ se } -\pi < x < -\tfrac{\pi}{2} \text{ e se } \tfrac{\pi}{2} < x < \pi$$

Dallo studio della derivata prima si ottiene $f'(x) > 0$ nel dominio della funzione e poichè

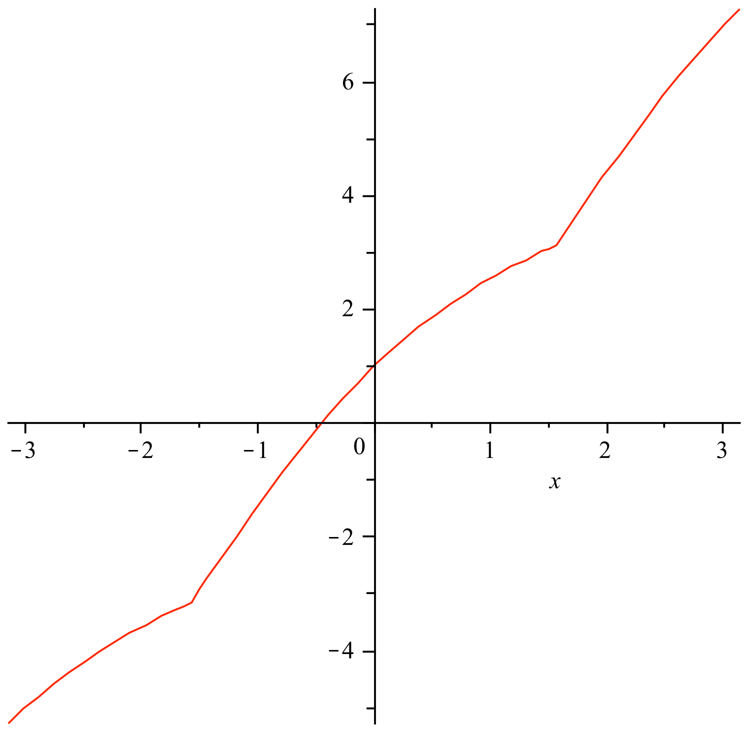
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f'(x) = 3$$

e

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f'(x) = 1$$

la funzione non è derivabile in $x = \frac{\pi}{2}$. Analogamente si dimostra che f non è derivabile in $x = -\frac{\pi}{2}$. Dallo studio della derivata seconda si ottiene poi che la funzione volge sempre la concavità verso il basso in quanto $f''(x) < 0$, negli intervalli $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$; $(\frac{\pi}{2}, \pi)$; $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Il grafico della funzione è:



Esercizio 2

Usando il criterio del rapporto, se $a_n = \dfrac{x^n}{\sqrt{n}5^n}$ si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}\ 5^{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}\ 5^n}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{5}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{|x|}{5}$$

Quindi, per il criterio del rapporto la serie risulta convergente per $-5 < x < 5$; per $x = 5$ la serie diventa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ che è divergente in quanto serie armonica con indice < 1; per $x = -5$ la serie diventa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ che è convergente per il criterio di Leibniz.

Esercizio 3

L'equazione caratteristica dell'equazione differenziale è $a^2 + 2a + 1 = 0$, la cui soluzione è la radice doppia $a = -1$. La soluzione generale dell'omogenea è quindi $y_o = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$; la soluzione particolare, essendo il secondo membro una combinazione lineare delle funzioni $\sin x$ e $cosx$, va cercata nella forma $y_p = a \sin x + b\ cosx$ e i coefficienti $a,\ b$ vanno determinati eseguendo le derivate di y_p e sostituendo nell'equazione di partenza. La soluzione del problema di Cauchy proposto è $y = -\dfrac{25}{2}e^{-x} - \dfrac{25}{2}xe^{-x} - \dfrac{25}{2}\cos x$

Esercizio 4

La regione si può esprimere facilmente in coordinate polari come l'insieme $D = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi\}$, quindi esprimendo la funzione in coordinate polari e moltiplicando per lo Jacobiano della trasformazione, l'integrale diventa

$$\int_D (\rho^2 \cos^2\theta)\rho^4 \cdot \rho\ d\rho\ d\theta =$$

(usando la formula di riduzione per gli integrali doppi)

$$= \int_0^\pi \cos^2\theta\ d\theta \Big(\int_0^1 (\rho^7)\ d\rho \Big) = \int_0^\pi \cos^2\theta\ d\theta \Big(\frac{1}{8}\Big) = \frac{1}{8}\int_0^\pi \frac{cos(2\theta)+1}{2}\ d\theta = \frac{1}{16}\pi.$$