B

Analisi Matematica per Informatica

10 settembre 2008

Esercizio 1

Si studi in dettaglio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{\sqrt{x+1}} & x \le 1 \\ \\ -2x + 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} & x > 1 \end{cases}$$

Esercizio 2

Trovare l'intervallo di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{2^n} \, (x-1)^n$$

Esercizio 3

Sia $x > 0$. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{y}{x} = \sqrt{x} \\ \\ y(1) = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Esercizio 4

Calcolare

$$\int_D 2xe^{-y} \, dxdy$$

dove D é l'insieme limitato dalle curve $x = -y$, $x^2 = y$ ed $x = 1$.

Esercizio 5

Enunciare una condizione sufficiente per la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $a_n > 0$.

Esercizio 6

Sia $F(x, y)$ una funzione derivabile in un intorno del punto (x_0, y_0), con derivate continue in tale intorno. Sia $F(x_0, y_0) = 0$, $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Sia $\varphi(x)$ la funzione derivabile verificante $F(x, \varphi(x)) = 0$ in un intorno di (x_0, y_0). Dimostrare che

$$\varphi'(x) = -\frac{F_x(x, \varphi(x))}{F_y(x, \varphi(x))}$$

Correzione Compito B

Esercizio 1

Il dominio della funzione è: $D = \{x \in \mathbb{R} : x > -1\}$ e la funzione f si può esplicitare in questo modo:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}, \text{ se } 0 \leq x \leq 1$$

$$f(x) = -\frac{x}{\sqrt{x+1}}, \text{ se } -1 < x < 0$$

$$f(x) = -2x + 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ se } x > 1$$

Inoltre

- $$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$$
- $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
- $$f0) = 0; \ f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
- $$f'(x) = -\frac{x+2}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}} \text{ se } -1 < x < 0$$
- $$f'(x) = \frac{x+2}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}} \text{ se } 0 < x < 1$$

  $$f'(x) = -2 \text{ se } x > 1$$
- $$f''(x) = \frac{-x-4}{4(x+1)^{\frac{5}{2}}} \text{ se } 0 < x < 1$$

  $$f''(x) = \frac{x+4}{4(x+1)^{\frac{5}{2}}} \text{ se } -1 < x < 0$$

Dallo studio della derivata prima si ottiene $f'(x) > 0$ in $(0, +\infty)$ e$f'(x) < 0$ in $(-1, 0)$; poichè

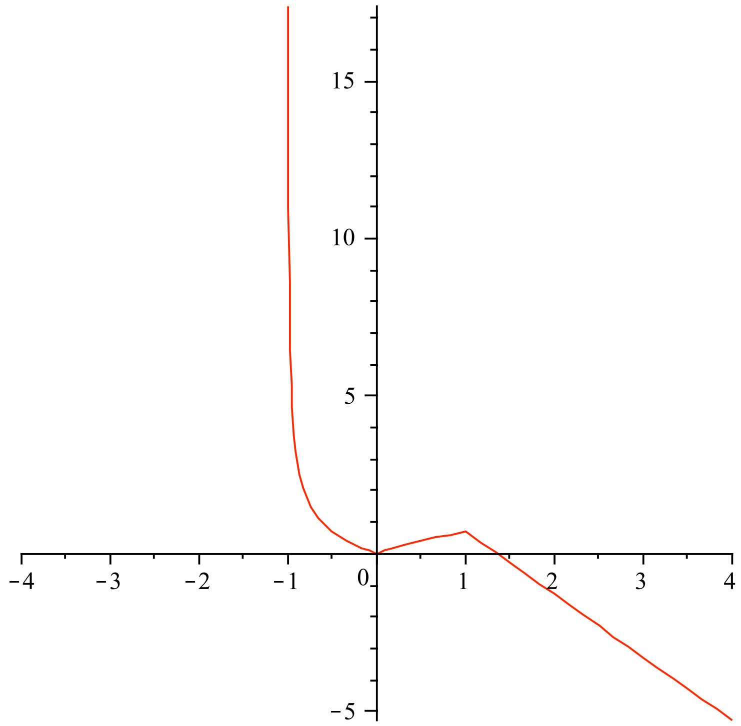
$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = -2$$

e

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \frac{3}{4\sqrt{2}}$$

la funzione non è derivabile in $x = 1$ e in modo analogo si dimostra che non è derivabile in $x = 0$. Dallo studio della derivata seconda si ottiene poi che la funzione volge la concavità verso il basso, in quanto $f''(x) < 0$, nell' intervallo $(0, 1)$; e verso l'alto, in quanto $f''(x) > 0$, nell' intervallo $(-1, 0)$.

Il grafico della funzione è:



Esercizio 2

Usando il criterio del rapporto, se $a_n = \dfrac{\sqrt{n+2}}{2^n}(x-1)^n$ si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|^{n+1}\sqrt{n+3}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{|x-1|^n\sqrt{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|}{2}\sqrt{\frac{n+3}{n+2}} = \frac{|x-1|}{2}$$

Quindi, per il criterio del rapporto la serie risulta convergente per $-1 < x < 3$; per $x = 3$ la serie diventa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+2}$ che è divergente in quanto $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2} = +\infty$; per $x = -1$ la serie diventa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n+2}$ che non è convergente perchè non esiste $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2}(-1)^n$.

Esercizio 3

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine, moltiplicando il primo e il secondo membro per $e^{\int x\ dx} = x$ (qui si è tenuto conto del fatto che $x > 0$), si ottiene :

$$(yx)' = x\sqrt{x}$$

Integrando i due membri si ottiene.

$$yx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + c$$

La soluzione esplicita dell'equazione differenziale è quindi

$$y = \frac{1}{x}\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + c\right)$$

La soluzione del problema di Cauchy proposto, ottenuta imponendo la condizione iniziale è $y = \frac{2}{5}x^{\frac{3}{2}}$

Esercizio 4

La regione si può esprimere come l'insieme $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, -x \le y \le x^2\}$, quindi usando la formula di riduzione per gli integrali doppi, l'integrale diventa:

$$= \int_0^1 2x\ dx \Big(\int_{-x}^{x^2} e^{-y}\ dy \Big) = \int_0^1 2x(-e^{-x^2} + e^x) = \int_0^1 (e^{-x^2})'\ dx + 2 \int_0^1\ x(e^x)'\ dx = 1 + \frac{1}{e}.$$

(L'ultimo integrale è stato svolto usando la regola di integrazione per parti)