Corso di Analisi Matematica **Anno accademico 2007/08**

Foglio di esercizi 11

Funzioni di 2 variabili: derivate parziali e direzionali, piano tangente.

Esercizio 1
Determinare e disegnare il dominio delle funzioni seguenti:

$$g(x,y) = \sqrt{1+y-x^2}$$

.

$$h(x,y) = \ln(25-2y^2-x^2)$$

Soluzioni e risposte

- $D = \{(x,y) : y \geq x^2 - 1\}$.
- $D = \{(x,y) : x^2 + 2y^2 \leq 25\}$, che è l'ellisse con centro l'origine e semiassi 5 e $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 2
Determinare il dominio e cercare di capire come è fatto il grafico delle seguenti funzioni:

1. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$,
2. $f(x,y) = x + y + 3$,

Esercizio 3
Calcolare le derivate parziali prime delle seguenti funzioni:

(a) $f(x,y) = \dfrac{xy^2 - y}{x^2 + y}$,

(b) $f(x,y) = \ln(8x) + \sqrt{x^2+y^2}$,

(c) $f(x,y) = \sin(x - y^2\sqrt{x}) + \cos(x - y^3)$

(d) $f(x,y) = \arctan(x^2 y) - \sqrt{x+y}$

(e) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+xy}$,

(f) $f(x,y) = \ln x + \sqrt{x^2+y}$,

(g) $f(x,y) = \arctan(x-y) + \cos(xy) - \sqrt{x^2y^3 + yx}$

(h) $f(x,y) = e^{3y}x$

(i) $f(x,y) = e^{\sin\frac{x}{y}}$

Esercizio 4

(a) Data $f(x,y) = 16 - x^2 - 4y^2$, calcolare $f_x(2,1)$ e $f_y(2,1)$ ed interpretare questi numeri come pendenze.

(b) Data $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$, calcolare $f_x(1,0)$ e $f_y(1,0)$ ed interpretare questi numeri come pendenze.

Esercizio 5
Verificare la tesi del Teorema di Schwarz vale a dire $u_{xy} = u_{yx}$ per le seguenti funzioni:

$$u = x^2 y + e^y, \qquad u = \ln x^3 + 5y^2$$

Esercizio 6
Verificare se ciascuna delle seguenti funzioni verifica l'equazione di Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = 0$:

(a) $u(x, y) = x^2 + y^2$,

(b) $u(x, y) = x^2 - y^2$,

(c) $u(x, y) = x^2 + 3xy^2$.

(d) $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$,

(e) $u(x, y) = e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x$.

Esercizio 7
Dare un esempio di funzione $f(x, y)$ le cui derivate parziali sono: $f_x = x + 4y$ e $f_y = 3x + y$ e le cui derivate seconde sono continue o spiegare perchè non esiste una tale funzione.
Soluzione Poichè la funzione ha derivate prime e seconde continue in ogni punto del piano, essa soddisfa le ipotesi del Teorema di Clairaut in ogni punto del piano, cioè $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$, nel caso considerato $f_{xy} = 4$ e $f_{yx} = 3$, quindi non può esistere una tale funzione.

Esercizio 8
Determinare l'equazione del piano tangente al grafico delle funzioni seguenti nel punto indicato a fianco di ciascuna di esse:

$$f(x.y) = x^3 + x^2 y + 3y^2 \quad (1, 1) \tag{1}$$

$$f(x.y) = \sqrt{x^2 - y} \quad (2, 1) \tag{2}$$

$$f(x.y) = \log(x + \sqrt{y}) \quad (1, 1) \tag{3}$$

Per le funzioni precedenti calcolare le derivate direzionali negli stessi punti precedenti lungo la direzione rispettivamente dei vettori $(1, -1)$, $(-3, 4)$, $(2, 2)$.