

Foglio di esercizi 12

Calcolo di integrali multipli.

Esercizio 1

Calcolare l'integrale delle funzioni seguenti sull'insieme scritto a fianco di ciascuna di esse:

1. $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + 2y$, $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ [Sol.: 7/3]
2. $f(x, y) = x^3y^2$, $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, -x \leq y \leq x\}$ [Sol.: 256/21]
3. $f(x, y) = y^2$, $D =$ triangolo di vertici $(0, 2)$, $(3, 2)$, $(1, 1)$
4. $f(x, y) = x + y$, $D =$ regione limitata dalle curve $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ [Sol.: 3/10]
5. $f(x, y) = x^2 - y$, $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2 - x\}$
6. $f(x, y) = xy$, $D =$ triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ [Sol.: 1/8]
7. $f(x, y) = \frac{2y}{x^2+1}$, $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ [Sol.: $\log(2)/2$]
8. $f(x, y) = e^{y^2}$, $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$
9. $f(x, y) = \frac{x}{y^2+1}$, $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$ [Sol.: $1/2 - \pi/8$]
10. $f(x, y) = x^2(y + 3)$, $D = \{(x, y) : 2 \leq y \leq 3, 1 \leq x \leq 2\}$
11. $f(x, y) = x(y + x)$, $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$ [Sol.: 7/12]
12. $f(x, y) = y^2 + \sqrt{x}$, $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 2, 1 \leq x \leq 2\}$
13. $f(x, y) = x$, $D =$ cerchio con centro l'origine e raggio uguale ad 1 [Sol.: 0]
14. $f(x, y) = \frac{x^2}{y^2}$, $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq x\}$
15. $f(x, y) = x^2$, $D =$ cerchio con centro l'origine e raggio uguale ad 1 [Sol.: $\pi/4$]
16. $f(x, y) = x + y^3$, $D =$ regione limitata da $y^2 = x$, $y = 0$, $x = 1$
17. $f(x, y) = xy$, $D = \{(x, y) : 1 \leq x + y, x^2 + y^2 \leq 1\}$ [Sol.: 1/12]
18. $f(x, y) = \frac{y^2}{1 + x^2 + y^2}$, $D =$ cerchio con centro l'origine e raggio uguale ad 1 [Sol.: $\pi/2(1 - \log 2)$]
19. $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$, $D =$ cerchio con centro l'origine e raggio uguale ad 1 [Sol.: 0]
20. $f(x, y) = x^2$, $D =$ settore di cerchio con centro l'origine e raggio uguale ad 1 delimitato dalle semirette di equazione $y = \sqrt{3}x$, $y = -\sqrt{3}x$, $x \geq 0$ [Sol.: $\pi/24 + \sqrt{3}/32$]
21. $f(x, y) = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, |y| \leq |x|\}$ [Sol.: $\pi/4$]
22. $f(x, y) = x - y$, $D =$ quadrilatero di vertici $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$
23. $f(x, y) = |\cos(x + y)|e^{2x-y}$, $D = \{(x, y) : |x + y| \leq \pi, |2x - y| \leq 1\}$