Corso di Analisi Matematica **Anno accademico 2007/08**

Foglio di esercizi 13

Massimi e minimi assoluti di funzioni di due variabili.

Esercizio 1

Determinare il massimo e il minimo assoluti di $f(x,y)$ sul dominio D seguendo i seguenti passi:

a)	$f(x,y) = 1 + 4x - 5y$	D è la regione triangolare chiusa di vertici $(0,0)$, $(2,0)$ e $(0,3)$
b)	$f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$	D è il quadrato chiuso di vertici $(-1-1)$, $(-1,1)$, $(1,1)$e $(1,-1)$
c)	$f(x,y) = 1 + xy - x - y$	D è la regione chiusa limitata dalla parabola $y = x^2$ e dalla retta $y = 4$
d)	$f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$	$D = \{(x,y) : -2 \le x \le 2, -1 \le y \le 1\}$
e)	$f(x,y) = x^2 + 3y^2 - xy - y$	D è il quadrato chiuso con vertici $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ e $(1,1)$.
f)	$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$	D è il cerchio chiuso di raggio 1 con centro in $(0,0)$
g)	$f(x,y) = 4x + 6y - x^2 - y^2$	$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 5\})$
h)	$f(x,y) = xy^2$	$D = \{(x,y) : 0 \le x, 0 \le y, x^2 + y^2 \le 3\}$
k)	$f(x,y) = e^{x^2+y^2+y}$	D è il rettangolo chiuso di vertici $(-1,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(-1,1)$

Soluzione di b).

- Le derivate parziali di f sono: $f_x = 2x(1+y)$, $f_y = 2y + x^2$. I punti critici di f sono $(0,0)$, $(-\sqrt{2},-1)$, $((-\sqrt{2},1)$ di cui solo il primo è interno e in cui $f = 4$.
- Il bordo del quadrato è costituito da 4 segmenti, restringendo la funzione ad uno di essi si ottiene una funzione di 1 variabile definita su un intervallo chiuso. Per esempio il lato superiore è $\{(x,y) : y = 1, -1 \le x \le 1\}$ e la funzione ristretta ad esso è $f(x,1) = 2x^2 + 5$, che si studia come funzione di una variabile sull'intervallo chiuso $[-1,1]$; il suo massimo è $f(1,1) = f(-1,1) = 7$, mentre il suo minimo è $f(0,1) = 5$. Ripetendo il ragionamento sugli altri lati si ottiene che il minimo sul bordo è $f(1,-\frac{1}{2}) = f(-1,-\frac{1}{2}) = 5 - \frac{1}{4}$ e il massimo è $f(-1,1) = f(1,1) = 7$.

Dai due passi precedenti si conclude che il massimo di f sul triangolo è $f(-1,1) = f(1,1) = 7$ e il minimo è $f(0,0)$.

Altre soluzioni. d) min = -26 in $(-2,-1)$ e $(2,-1)$; max = 2 in $(0,0)$. f) min = 0 in $(0,0)$; max = 3/2 in $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ e $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$. h) min = 0 in $(x,0)$ o $(0,y)$; max = 2 in $(1,\sqrt{2})$]