Corso di Analisi Matematica **Anno accademico 2007/08**

Foglio di esercizi 2

Esempi di funzioni, composizione di funzioni, funzioni iniettive, funzioni inverse, trigonometria.

Esercizio 1
Il perimetro di un triangolo rettangolo è 6, esprimere l'area del triangolo in funzione della sua ipotenusa.

Esercizio 2
Un cono è inscritto in una sfera di raggio a. Detto r il raggio di base del cono, esprimere il suo volume come funzione di r.

Esercizio 3
Determinare l'area di un triangolo equilatero in funzione del suo lato x.

Esercizio 4
Date le funzioni $f(x) = x + \frac{1}{x}$ e $g(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ calcolare $f \circ g,\ g \circ f,\ f \circ f$, precisando il loro dominio.
Soluzioni

$$(f \circ g)(x) = \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+1} \quad D = \{x : x \neq -2, -1\}$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{x^2+1+x}{x^2+1+2x} \quad D = \{x : x \neq -1, x \neq 0\}$$

$$(f \circ f)(x) = \frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1} \quad D = \{x : x \neq 0\}$$

Esercizio 5
Assegnata la funzione $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, calcolare$f(-x),\ f(\frac{1}{x}),\ f(\frac{1}{1-x}),\ f(f(x))$.

Esercizio 6
Stabilire se le seguenti funzioni sono pari o dispari o nessuna delle due cose.

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad g(x) = \frac{x^2+1}{1+x^4}, \quad h(x) = \frac{x^3+1}{1+x^4} \tag{1}$$

$$f(x) = x^5 + 1, \quad g(x) = x(x+1), \quad h(x) = [x] \tag{2}$$

(*La funzione $h(x) = [x]$, chiamata parte intera di $[x]$ è definita per ogni x reale come il più grande intero minore o uguale ad x*).

Esercizio 7
Sia $h = f \circ g$,

- Se g è pari, si dimostri che h è pari.
- Se g è dispari h è dispari? Si dimostri la tesi o si fornisca un controesempio.
- Che cosa succede se f è pari o dispari?

Esercizio 8
Assegnate le funzioni

$$f(x) = \frac{1+x}{2x+1}, \quad g(x) = \frac{1}{2+x}, \quad l(x) = x|x|, \quad h(x) = x^3 + 1$$

precisarne il dominio e quando possibile l'immagine. Trovarne poi, nel caso che esistano, le funzioni inverse delle stesse precisandone il dominio.

Alcune soluzioni.
$f(x)$ è definita per $x \neq -\frac{1}{2}$, poichè non sappiamo (per ora) tracciare il grafico d f, per trovare la funzione inversa procediamo direttamente cercando di risolvere $y = \dfrac{1+x}{2x+1}$ rispetto ad x. Si ottiene quindi $x = \dfrac{1-y}{2y-1}$, scambiando x con y otteniamo $f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{2x-1}$, che è definita per $x \neq \frac{1}{2}$.

Per la g procedendo come per la f otteniamo $D = \{x : x \neq -2\}$ e risolvendo $y = \dfrac{1}{2+x}$ rispetto ad x dopo aver scambiato x con y otteniamo la funzione inversa $g^{-1}(x) = \dfrac{1-2x}{x}$, che è definita per $x \neq 0$.

Esercizio 9
Calcolare con i teoremi di geometria elementare noti $\cos\frac{\pi}{3}$, $\sin\frac{\pi}{3}$, $\tan\frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{5}{6}\pi$, $\sin\frac{5}{6}\pi$, $\tan\frac{5}{6}\pi$,$\cos\frac{7}{4}\pi$, $\sin\frac{7}{4}\pi$, $\tan\frac{7}{4}\pi$.

Esercizio 10
Dedurre dalla formula di sottrazione del coseno la formula di addizione del coseno

Esercizio 11
Usare le formule di addizione per il coseno e le identità

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha, \quad \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$$

per provare le formule di addizione del seno.

Esercizio 12
Ricavare le formule di duplicazione del seno e del coseno dalle formule di addizione.

Esercizio 13
Calcolare $\arcsin 1$, $\arctan\sqrt{3}$.

Esercizio 14
Dimostrare che $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.