Corso di Analisi Matematica **Anno accademico 2007/08**

Foglio di esercizi 3

Trigonometria, limiti di funzioni e di successioni.

Riepilogo sulla risoluzione di alcune equazioni trigonometriche.

1. $\sin x = c$, se $c > 1$ o $c < -1$, l'equazione non ha nessuna soluzione, se $-1 \leq c \leq 1$, sia α l'angolo appartenente all'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ o appartenente all'intervallo $[\pi, \frac{3}{2}\pi]$ (notare che un tale angolo esiste sempre) tale che $\sin \alpha = c$, allora le soluzioni dell'equazione di partenza sono $x = \alpha + 2k\pi$ e $x = \pi - \alpha + 2k\pi$, con k intero.

2. $\cos x = c$, se $c > 1$ o $c < -1$, l'equazione non ha nessuna soluzione, se $-1 \leq c \leq 1$. sia α l'angolo appartenente all'intervallo $[0, \pi]$ tale che $\cos \alpha = c$, allora essendo cos una funzione pari, le soluzioni dell'equazione di partenza sono $x = \alpha + 2k\pi$ e $x = -\alpha + 2k\pi$ con k intero.

3. $\tan x = c$, con c numero reale qualsiasi, sia α l'angolo appartenente all'intervallo $[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$ tale che $\tan \alpha = c$, allora essendo tan una funzione di periodo π, le soluzioni dell'equazione di partenza sono $x = \alpha + k\pi$ con k intero.

Riepilogo sulla risoluzione di due disequazioni trigonometriche.

1. $\sin x > c$, se $c > 1$, la disequazione non ha nessuna soluzione, se $c = -1$ la soluzione è $x \neq \frac{3}{2}\pi$, se $1 > c \geq 0$ e se $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ verifica $\sin \alpha = c$ la soluzione nell'intervallo $[0, 2\pi]$ è $\alpha < x < \pi - \alpha$; se $c < 0$ e se $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$ verifica $\sin \alpha = c$ la soluzione nell'intervallo $[0, 2\pi]$ è $\pi - \alpha < x < 2\pi$ e $0 < x < \alpha$.

2. $\cos x > c$, se $c > 1$, la disequazione non ha nessuna soluzione, se $c = -1$ la soluzione è $x \neq \pi$, se $c < 1$ e se $\alpha \in [0, \pi]$ verifica $\cos \alpha = c$ la soluzione nell'intervallo $[0, 2\pi]$ è $2\pi - \alpha < x < 2\pi$ e $0 < x < \alpha$.

Esercizio 1
Risolvere nell'intervallo $[0, 2\pi]$ le seguenti equazioni :

1. $4\cos^2 x = 3$ *Soluzione:* $\{\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\}$
2. $\sin x + \cos x = 1$
3. $\sin 2x = 2\sin x$
4. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$ *Soluzione:* $\{\frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi\}$
5. $sin^2 x + \cos 2x = 1$ *Soluzione:* $x = \pi,\ x = 0$
6. $\sin^2 x - 2\cos x + \frac{1}{4} = 0$ *Soluzione:* $x = \frac{\pi}{3},\ x = \frac{5}{3}\pi$

Esercizio 2
Risolvere nell'intervallo $[0, 2\pi]$ le seguenti disequazioni:

1. $\sin x + \cos x < 1$
2. $2\cos^2 x + \cos x - 1 > 0$ *Soluzione:* $0 < x < \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$
3. $|2\cos x| > 3$
4. $3\cos x + \sin^2 x - 3 > 0$ *Soluzione: nessuna*

Esercizio 3
Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$
2. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-x+6}{x-2}$
3. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4}$
4. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{x-2}$
5. $\lim_{x\to -4} \dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}{4+x}$
6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^4+x^3+2x+1}{x^3+1}$
7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3-3x^2+2x}{x^4-x}$
8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3+3x}{2x}$
9. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$
10. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^4}-1}{x^4}$

Esercizio 4
Se $f(x)=[x]$ rappresenta la funzione *parte intera di x* valutare

$$\lim_{x\to 2+}[x], \quad \lim_{x\to 2-}[x], \quad \lim_{x\to 2.1}[x]$$

Esercizio 5
Se $f(x)=[x]+[-x]$ valutare l'esistenza del seguente limite:

$$\lim_{x\to 1}[x]+[-x]$$

Esercizio 6
Stabilire se i seguenti limiti esistono (si consiglia di calcolare separatamente i limiti destro e sinistro) e in caso affermativo trovarne i valori.

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$
2. $\lim_{x\to 3} \dfrac{|x-3|}{x-3}$
3. $\lim_{x\to 0} (\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|})$
4. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{|x-2|}$

Soluzione di 3. Si ha $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-x}{x|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{0}{x^2}=0$ e $\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x-x}{-x^2}=-\infty$.

Esercizio 7
Calcolare i valori dei limiti delle seguenti funzioni razionali per $x\to+\infty$ e per $x\to-\infty$:

1. $\dfrac{x^3+x}{3x^3+x+2x^2}$
2. $\dfrac{x^4+2}{x^6+2x^2-x}$
3. $\dfrac{x^5+x+5}{x^2+10x-3}$

Esercizio 8
Trovare gli eventuali asintoti orizzontali, verticali e obliqui delle curve di equazione:

1. $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+2x}+2}{2x-3}$
2. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+2x-8}$
3. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$

Esercizio 9
Calcolare i valori dei limiti delle seguenti successioni per $n\to+\infty$:

1. $a_n=\dfrac{3n-1}{1+n^2}$, *Soluzione: 0*
2. $a_n=\dfrac{\sqrt{3n+2}}{4+n^2}$
3. $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
4. $a_n=1+(-1)^n$, *Soluzione: Non esiste*
5. $a_n=\left(1+\frac{7}{n}\right)^n$
6. $a_n=\dfrac{\cos^2 n}{2^n}$
7. $a_n=(-1)^n n$
8. $a_n=n(\sqrt{n^2+1}-n)$, *Soluzione:* $\frac{1}{2}$