

Foglio di esercizi 4

Calcolo di derivate, calcolo di limiti, studio di funzioni.

Esercizio 1

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \log \cos x$

2. $f(x) = \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$

3. $f(x) = \log(x + \sqrt{4 + x^2})$

4. $f(x) = e^{4x} - \frac{1}{2} \log(2x) - e^{\cos x}$

Esercizio 2

Trovare le rette tangenti alla funzione $f(x) = |x^2 - 5x + 6| - 2$ nei punti di intersezione della funzione con l'asse delle ascisse.

Esercizio 3

Trovare il polinomio di secondo grado $P(x)$ tale che il grafico $y = P(x)$ passi per i punti $A = (1, 0)$ e $B = (2, 4)$ e sia tangente in A alla retta $y = 3(x - 1)$.

Esercizio 4

Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x+2)}{\log x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\log x}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+x^5)}{\log(2+x^3)}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{\sin^2 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^x}{1 - \cos \sqrt{x}}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \sqrt{1+x^2}}{1 - \cos x}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{e^x - 1}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x}{\sin^2 x}$,

Esercizio 5

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & 0 \leq x < 1 \\ |x^2 + x| & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[0, 3]$?

Soluzione

La funzione f non è derivabile in $x = 1$, quindi non soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[0, 3]$.

Esercizio 6

Studiare le seguenti funzioni e dedurne il grafico:

1. $y = \frac{x}{x+1}$

2. $y = \frac{x^2 + 4x - 1}{x+1}$

3. $y = \frac{x}{x^3 - 1}$

4. $y = \sqrt{x^2 - 3x}$

5. $y = \sqrt[3]{x^2 - 3x}$

6. $y = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 1 \\ 2x + 1 & x \leq 1 \end{cases}$

7. $y = \frac{x^2 - |x+2|(x+1)}{2x+3}$

8. $y = x^3 - 3|x-1| + 2$

Esercizio 7

Discutere quante soluzioni ha l'equazione

$$x^5 + x = k$$

al variare del parametro reale k .