Corso di Analisi Matematica **Anno accademico 2007/08**

Foglio di esercizi 5

Studio di funzioni, calcolo di integrali.

Esercizio 1
Studiare le seguenti funzioni e tracciarne un grafico:

(a) $$f(x) = \log|x+1|$$

(b) $$f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$$

(c) $$f(x) = \log(3x^2+4x+2)$$

(d) $$f(x) = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \quad \text{nell'intervallo} \quad (0, \frac{\pi}{2})$$

(e) $$f(x) = e^{-x^2}$$

(f) $$f(x) = x - \log x$$

(g) $$f(x) = x - 3\log|x| + 1$$

(h) $$f(x) = x + e^x$$

(k) $$f(x) = \sqrt[3]{x^2-3x-5}$$

(l) $$f(x) = \log\frac{x}{x+2}$$

Esercizio 2
Calcolare tutte le primitive delle seguenti funzioni:

(1) $$f(x) = x^3 + x - 5$$

(2) $$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

(3) $$f(x) = \frac{3}{x} + x^3$$

(4) $$f(x) = e^x + 2$$

(5) $$f(x) = \frac{x^2+x+x^3}{\sqrt{x}}$$

(6) $$f(x) = 2\cos x - 5\sin x$$

(7) $$f(x) = \frac{x^3-x}{x^2}$$

Esercizio 3
Calcolare tutte le primitive delle seguenti funzioni usando la regola di integrazione per sostituzione:

1. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$
2. $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$
3. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ (funzione della forma $\frac{f'(x)}{f(x)}$)
4. $f(x) = \sqrt{x+1}$
5. $f(x) = x\sqrt{1-3x^2}$ (funzione della forma $f'(x)[f(x)]^\alpha$)
6. $f(x) = (x-1)(x^2+2)$
7. $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$
8. $f(x) = \cos x(\sin x)^4$
9. $f(x) = \frac{1}{x}(\log x)^{\frac{2}{3}}$
10. $f(x) = e^x(\cos e^x)$
11. $f(x) = \frac{2}{3x+1}$
12. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$
13. $f(x) = \frac{2\log^2 x + \log x}{x}$
14. $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$
15. $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$
16. $f(x) = \frac{1}{2x+1}$
17. $f(x) = xe^{x^2}$
18. $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$
19. $f(x) = 2x(x^2+3)^4$
20. $f(x) = \frac{\text{arctg}\, x}{1+x^2}$
21. $f(x) = \sin(3x)$
22. $f(x) = \frac{1}{5-3x}$
23. $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$

Alcune soluzioni e risultati.

(2) $R = \text{tg}\, e^x + c$

(7) $f(x) = \frac{x-1}{x-1} - \frac{1}{x-1}$, $R = x - \log|x-1| + c$.

(10) $R = \sin e^x + c$

(14) $\frac{x}{2} = t$, $R = \frac{1}{2}\text{arctg}\,\frac{x}{2} + c$

(17) Con la sostituzione $x^2 = t$ si ottiene $2xdx = dt$ e quindi $\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$.

(18) Con la sostituzione $\sqrt{x} = t$ si ottiene $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt$ e quindi $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int e^t dt = 2e^t + c = 2e^{x^2} + c$

(19) Con la sostituzione $x^2+3=t$ si ottiene $2xdx = dt$ e quindi $\int 2x(x^2+3)^4dx = \int t^4dt = \frac{t^5}{5}+c = \frac{(3+x^2)^5}{5}+c$.

(21) Con la sostituzione $3x = t$ si ottiene $3xdx = dt$ e quindi $\int \sin 3xdx = \frac{1}{3}\int \sin tdt = -\frac{1}{3}\cos t + c = \frac{1}{3}\cos(3x)+c$.

(22) Con la sostituzione $5-3x = t$ si ottiene $-3dx = dt$ e quindi $\int \frac{1}{5-3x}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{t}dt = -\frac{1}{3}\log|t|+c = -\frac{1}{3}\log|5-3x|+c$

Esercizio 4
Calcolare tutte le primitive delle seguenti funzioni, usando la regola di integrazione per parti:

1. $f(x) = x\cos x$
2. $f(x) = \log x$
3. $f(x) = x^3e^{-x}$
4. $f(x) = x^4\log x$
5. $f(x) = e^{2x}\sin 3x$
6. $f(x) = \text{arctg } x$

Alcune soluzioni e risultati.

1. $R = \int xd(\sin x)dx = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + c$
2. $R = x\log x - x + c$
4. $R = \int x^4\log xdx = \int \log xd\frac{x^5}{5}dx = \frac{x^5}{5}\log x - \int \frac{x^5}{5}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x^5}{5}\log x - \frac{x^5}{25}+c$

Esercizio 5
Sia data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

1. Tracciare il grafico qualitativo di $f(x)$.
2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $P = (2,-1)$ e nel punto $Q = \left(4, -\frac{1}{3}\right)$.
3. Si consideri un generico punto R sul grafico di f nel tratto compreso fra P e Q; siano A e B le intersezioni con gli assi coordinati della retta tangente al grafico di f in R. Detta x_R l'ascissa del punto R, scrivere l'area del triangolo AOB in funzione di x_R e determinare x_R in modo tale che questa area sia massima e minima [ricordare che R è compreso fra P e Q, ossia $2 \le x_R \le 4$].

Soluzione punto (3).
L'equazione della retta tangente alla curva in x_R è $y = \dfrac{1}{1-x_R} + \dfrac{x-x_R}{(1-x_R)^2}$. Le intersezioni con gli assi y e x sono rispettivamente $\dfrac{1-2x_R}{(1-x_R)^2}$ e $2x_R-1$. L'area del triangolo AOB in funzione di x_R è $\dfrac{(2x_R-1)^2}{2(1-x_R)^2}$. $f'(x_R) = \dfrac{2x_R-1}{(1-x_R)^3} \le 0$, quindi dal confronto dei valori di f, negli estremi dell'intervallo si conclude che il massimo si ottiene per $x_R = 2$ e il minimo per $x_R = 4$.

Esercizio 6
Mostrare che l'equazione $2x^3+3x-3 = 0$ ha una sola soluzione reale.
Soluzione

La funzione $f(x) = 2x^3 + 3x - 3$ è continua per ogni $x \in \mathbb{R}$, inoltre $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Dai due limiti, applicando direttamente la definizione si ottene : per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x > \delta$ $f(x) > M$ e per ogni $x < -\delta$, $f(x) < -M$; quindi esistono $x_1 > \delta$, $x_2 < -\delta$ tali che $f(x_1) > M > 0$ e $f(x_2) < -M < 0$. Alla funzione f si può applicare il Teorema dei valori intermedi e quindi esiste $x_0 \in (x_1, x_2)$ tale che $f(x_0) = 0$. Essendo $f'(x) = 6x^2 + 3 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, la funzione f è strettamente crescente e quindi la soluzione dell'equazione $f(x) = 0$ è unica.

Esercizio 7
Ognuna delle seguenti curve ha un arco giacente sopra l'asse delle x. Calcolare l'area sotto di esso.

$$y = 10 - x - 2x^2 \tag{1}$$

$$y = -x^3 - 4x^2 - 4x \tag{2}$$

$$y = x^4 - 6x^2 + 9 \tag{3}$$

$$y = x^3 + 2x^2 - 8x \tag{4}$$