

Foglio di esercizi 6

Calcolo di integrali, studio di funzioni.

Esercizio 1

Calcolare l'area delimitata dall'asse x , dalla curva e dalle rette verticali date.

(1)
$$y = \sqrt{x+2} \quad x = 2 \quad x = 7$$

(2)
$$y = \sqrt[3]{3-x} \quad x = -5 \quad x = 3$$

(3)
$$y = x\sqrt{5-x^2} \quad x = 0 \quad x = \sqrt{5}$$

(4)
$$y = \frac{x}{(x^2+1)^2} \quad x = 0 \quad x = 3$$

Esercizio 2

Calcolare l'area della regione piana limitata dalle curve $y = e^x - 2$ e $y = 2 - 3e^{-x}$.*Soluzione.* I punti di incontro delle due curve sono $x = 0$ e $x = \log 3$. L'area compresa fra le due curve è $\int_0^{\log 3} (2 - 3e^{-x} - e^x + 2)dx = 4 \log 3 - 4$.

Esercizio 3

Calcolare l'area della regione piana limitata dalla curva $y = -x^2 + 9$, dall'asse y e dalla retta $x = 2$.

Esercizio 4

Calcolare tutte le primitive delle seguenti funzioni :

1. $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$

2. $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+1)}$

3. $f(x) = \frac{x^2+1}{2x+1}$

4. $f(x) = \frac{9e^{3x}}{9e^{2x}-6e^x+1}$

5. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x}$

6. $f(x) = \frac{1}{x-\sqrt{x+2}}$

7. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-4}$

8. $f(x) = \frac{x^3+x}{x^2+2x+4}$

9. $f(x) = \frac{x^3+3x+2}{x^2+4x+4}$

10. $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x^2+x-2}$

11. $f(x) = \sqrt{4+x^2}$

$$12. f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

$$13. f(x) = \frac{1}{\sin x}$$

$$14. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$15. f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$$

Alcune soluzioni e risultati.

(1) Completare il quadrato al denominatore e usare la sostituzione $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = t$, $R = \frac{2}{\sqrt{3}} \tan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$

(2) Si cerca una decomposizione della forma $\frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}$, con A B costanti da determinare in base al principio di identità dei polinomi, la primitiva della funzione è $\frac{1}{3} \log |x-2| - \frac{1}{3} \log |x-1| + c$.

(3) Si esegue dapprima la divisione di $x^2 + 1$ per $2x + 1$ ottenendo $\frac{x^2+1}{2x+1} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{5}{4(2x+1)}$, la primitiva è $\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{5}{8} \log |2x + 1|$.

Esercizio 5

Dimostrare le formule di riduzione:

$$1. \int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$$

$$2. \int (\log x)^n \, dx = x(\log x)^n - n \int (\log x)^{n-1} \, dx$$

$$3. \int x^n e^x \, dx = x^n e^n - n \int x^{n-1} e^x \, dx$$

Usare le formule ottenute per calcolare gli integrali indefiniti di $\cos^4 x$, $(\log x)^2$, $(\log x)^3$, $x^4 e^x$.

Esercizio 6

Usando un opportuno studio di funzione stabilire quante soluzioni ha l'equazione:

$$e^{2x} - kx = 0,$$

al variare del parametro reale k .

Esercizio 7

Studiare le seguenti funzioni:

$$1. f(x) = \sqrt{x^2 + 9} - \frac{1}{2}|x|,$$

$$2. f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 1} \text{ in } [\pi, 2\pi]$$